

Ejercicio 3

a) El momentum angular está dado por

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i, \quad \text{con } \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i$$

Calculemos los $\vec{r}_i$:

$$\triangleright \vec{r}_1 = \left(\frac{L}{2} + D \right) \hat{p} \quad \triangleright \vec{r}_2 = - \left(\frac{L}{2} - D \right) \hat{p}$$

así que las velocidades serían

$$\triangleright \vec{v}_1 = \left(\frac{L}{2} + D \right) \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\triangleright \vec{v}_2 = - \left(\frac{L}{2} - D \right) \dot{\phi} \hat{\phi}$$

y sabemos que $m_1 = m_2 = m$
entonces los momt. ang. son

$$\triangleright \vec{L}_1 = m \left(\frac{L}{2} + D \right)^2 \dot{\phi} \hat{k}$$

$$\triangleright \vec{L}_2 = m \left(\frac{L}{2} - D \right)^2 \dot{\phi} \hat{k}$$

y el momt. ang. total es la suma

$$\vec{L}^{\text{tot}} = \sum_i \vec{L}_i = 2m \left(\frac{L^2}{4} + D^2 \right) \dot{\phi} \hat{k}$$

b) El torque que ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre la i -ésima partícula se calcula como

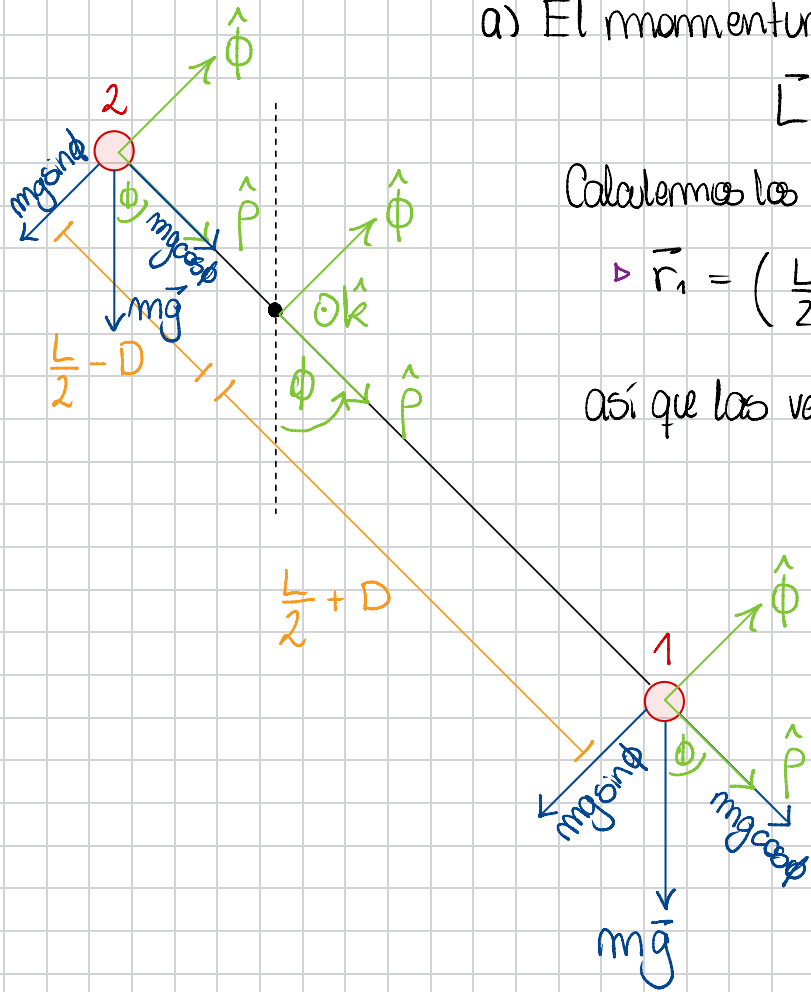
$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}$$

donde solo consideramos fuerzas externas (por ej. no consideramos el torque de la barra).
Solo tenemos el peso como fuerza externa,

$$m\vec{g} = mg \cos \phi \hat{p} - mg \sin \phi \hat{\phi}, \quad \text{con } mg > 0$$

y usando los $\vec{r}_i$ obtenemos

$$\triangleright \vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{g} = \left(\frac{L}{2} + D \right) \hat{p} \times (mg \cos \phi \hat{p} - mg \sin \phi \hat{\phi})$$



$$= -mg \sin \phi \left(\frac{L}{2} + D \right) \hat{k}$$

$$\triangleright \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{g} = \dots = mg \sin \phi \left(\frac{L}{2} - D \right) \hat{k}$$

Y el torque total está dado por la suma

$$\vec{\tau}^{\text{tot}} = \sum_i \vec{\tau}_i = -2mg \sin \phi \cdot D \hat{k}$$

c) Finalmente, ocupando la fórmula

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^{\text{tot}} = \vec{\tau}^{\text{tot}},$$

donde ocupando que $\dot{\hat{k}} = 0$ obtenemos

$$2m \left(\frac{L^2}{4} + D^2 \right) \ddot{\phi} \hat{k} = -2mg \sin \phi D \hat{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{4gD}{L^2 + 4D^2} \sin \phi = 0$$

que tiene la forma de un péndulo simple.