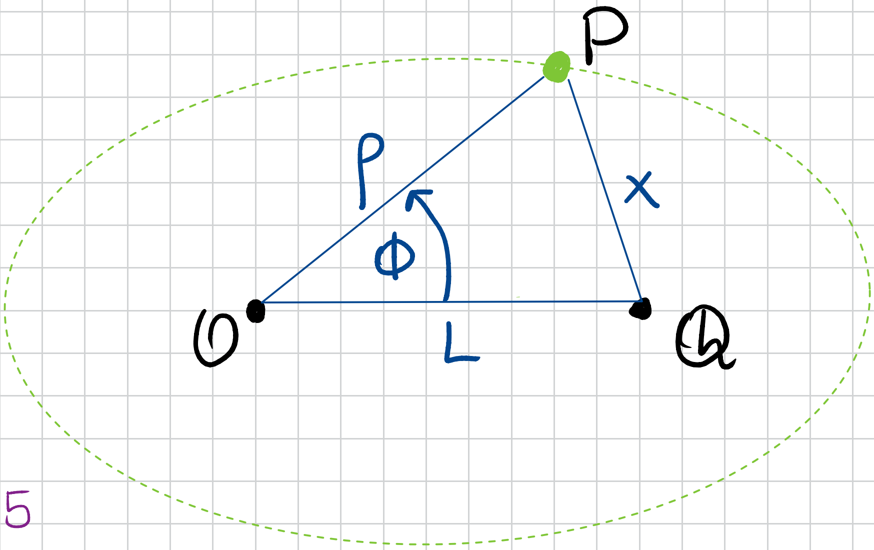
# Control 1

## P1




a) Por teo. del coseno se tiene que

$$x^2 = \rho^2 + L^2 - 2\rho L \cos\phi \quad +0.8$$

y como la cuerda mide $2L$ en total, entonces

$$\rho + x = 2L \Rightarrow x = 2L - \rho \quad +0.5$$

juntando ambas eqs.

$$(2L-\rho)^2 = \rho^2 + L^2 - 2\rho L \cos\phi$$

$$4L^2 - 4L\rho + \cancel{\rho^2} = \cancel{\rho^2} + L^2 - 2\rho L \cos\phi$$

$$\Leftrightarrow 3L^2 = L\rho(4 - 2\cos\phi)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho(\phi) = \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}} \quad +0.7$$

b) La velocidad en coordenadas cilíndricas con origen en O sería

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} \quad +0.4$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\right)\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\omega_0\hat{\phi}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{L}{(2-\cos\phi)^2}\sin\phi\,\omega_0\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-\cos\phi}\omega_0\hat{\phi} \quad +0.6$$

donde se utilizó que, por enunciado, $\dot{\phi} = \omega_0$ constante $\forall t$. Evaluando en $\phi = \pi/3$ obtenemos

$$\vec{v}(\phi=\pi/3) = -\frac{3}{2}\frac{L}{(2-1/2)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\hat{\rho} + \frac{3}{2}\frac{L}{2-1/2}\omega_0\hat{\phi}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}L\omega_0\hat{\rho} + L\omega_0\hat{\phi} \quad +0.5$$

y si tomamos su magnitud

$$\|\vec{v}(\phi=\pi/3)\| = \sqrt{\frac{3}{9}L^2\omega_0^2 + L^2\omega_0^2} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0} \quad +0.5$$

c) Para calcular el radio de curvatura ocupamos la indicación, así que debemos calcular la aceleración.

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \underbrace{\cancel{\rho\ddot{\phi}}}_{=0})\hat{\phi} \quad +0.4$$

$$\triangleright\ \ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{3}{2}\frac{L}{(2-\cos\phi)^2}\sin\phi\, \omega_0\right]$$

$$= -\frac{3}{2}L\omega_0 \frac{1}{(2-\cos\phi)^4}\left(\cos\phi\, \omega_0 (2-\cos\phi)^2 - 2\sin\phi(2-\cos\phi)\sin\phi\, \omega_0\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{L\omega_0^2}{(2-\cos\phi)^4}\left(\cos\phi(2-\cos\phi)^2 - 2\sin^2\phi(2-\cos\phi)\right)$$

que evaluado en $\phi = \pi/3$ es

$$\Rightarrow \ddot{\rho}(\phi=\pi/3) = -\frac{3}{2}\frac{2^4}{3^4}L\omega_0^2\left(\frac{1}{2}\frac{9}{4} - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{8}{27}L\omega_0^2\left(\frac{9}{8} - \frac{18}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{3}L\omega_0^2$$

Reemplazando todo lo encontrado

$$\vec{a}(\phi=\pi/3) = \left(\frac{1}{3}L\omega_0^2 - L\omega_0^2\right)\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi}$$

$$= -\frac{2}{3}L\omega_0^2\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi} \quad +0.6$$

y con esto hacemos el producto cruz

$$[\vec{v}\times\vec{a}](\phi=\pi/3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}L\omega_0\hat{\rho} + L\omega_0\hat{\phi}\right)\times\left(-\frac{2}{3}L\omega_0^2\hat{\rho} - \frac{2\sqrt{3}}{3}L\omega_0^2\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{2}{3}L^2\omega_0^3\hat{k} + \frac{2}{3}L^2\omega_0^3\hat{k}$$

$$= \frac{4}{3}L^2\omega_0^3\hat{k} \Rightarrow \|\vec{v}\times\vec{a}\|(\phi=\pi/3) = \frac{4}{3}L^2\omega_0^3 \quad +0.5$$

con lo que podemos calcular $\rho_c$

$$\rho_c(\phi=\pi/3) = \frac{\|\vec{v}\|^3}{\|\vec{a}\times\vec{v}\|} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}L}{3}} \quad +0.5$$