Auxiliar 5

Dinámica II

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- Control 1 2022-2

Una bolita de masa m se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(\rho)$ donde z y ρ son coordenadas cilíndricas y el eje vertical $\hat{k}$ es el eje de revolución de la copa (ver Figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo **un círculo** y manteniendo **constante su altura**.

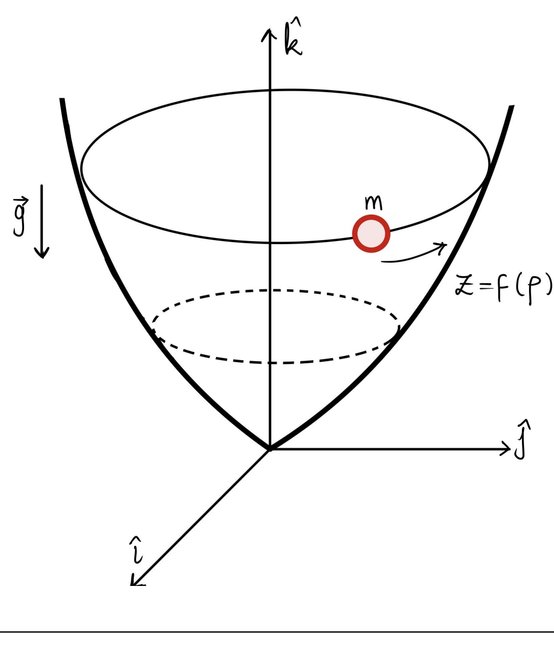
a) Dibuje el DCL de la bolita

b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

c) Determine la velocidad angular ω de la bolita en términos de $\frac{dz}{d\rho}$, el radio del círculo y otras constantes del problema

d) Considere los casos de una copa de martini ($z_m = \rho$) y en una de vino ($z_v = H\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$). Determine la velocidad angular ω en cada caso

e) Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros



P2.- Fuerza normal no trivial

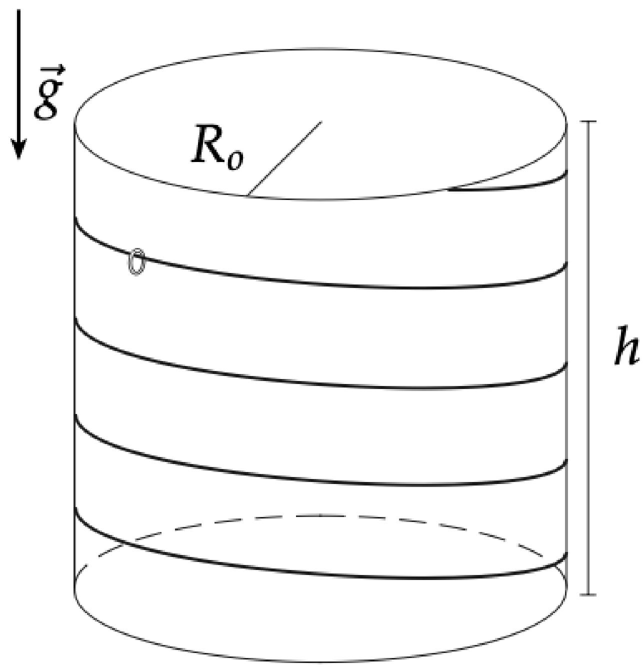
Un anillo de masa m desciende, debido a su propio peso, por un alambre de forma helicoidal de radio R_0 y paso tal que $z = h - \phi R_1$. No hay roce anillo-alambre, pero si hay un **roce viscoso**: el anillo es frenado por un roce viscoso lineal $\vec{F} = -c\vec{v}$.

La condición inicial es $\phi(0) = 0$, $z(0) = h$ y $\dot{\phi}(0) = 0$ y la aceleración de gravedad es g.

a) Obtenga el vector unitario tangente $\hat{t}$ de la trayectoria y con este encuentre la expresión más general posible para la fuerza normal $\vec{N}$ de este problema.

b) Descomponga la ecuación (vectorial) de movimiento en ecuaciones escalares (lo usual).

c) De las ecuaciones anteriores obtenga la forma explícita de $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ en función de los datos: $m,\ R_0,\ R_1,\ c$ y g.



Formulario

Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$

Fuerza normal general

Por definición, la fuerza normal $\vec{N}$ es **siempre es perpendicular/normal** a la superficie.

El vector unitario **tangente** a la trayectoria de una partícula se calcula como

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||},$$

por lo que, en la mayoría de los casos (no todos), se tiene la relación $\hat{t} \cdot \vec{N} = 0$. Esta relación solo se ocupa cuando la partícula sigue una trayectoria no trivial.

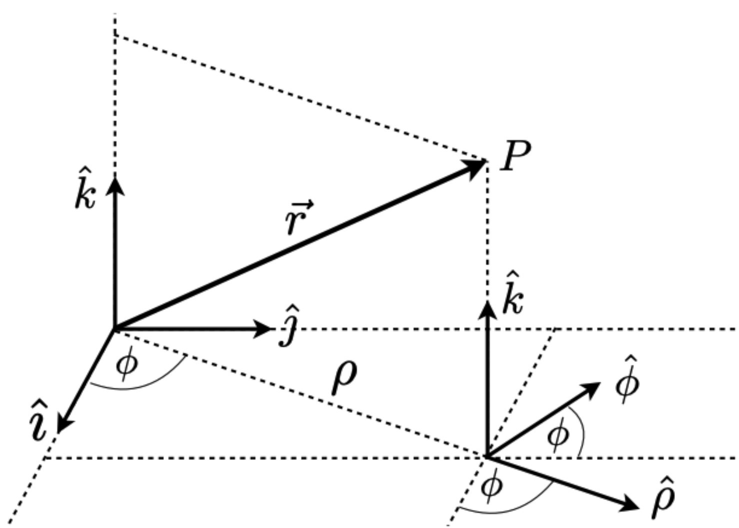


Figura 1: Coordenadas cilíndricas