Auxiliar 4: Dinámica y coordenadas intrínsecas

27 de Marzo del 2024

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudantes: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- **Péndulo de Andronov:** Considere un anillo de masa m, el cual se desplaza sin fricción sobre un aro de radio R y masa despreciable, bajo la influencia de la gravedad. El aro se encuentra colgado, y girando con velocidad angular constante Ω.

a) Encuentre la ecuación de movimiento del sistema.

b) Encuentre la posición de equilibrio del sistema.

c) Determine qué ocurre con la posición de equilibrio en los límites $\Omega^2 \sim g/R$ y $\Omega^2 \gg g/R$.

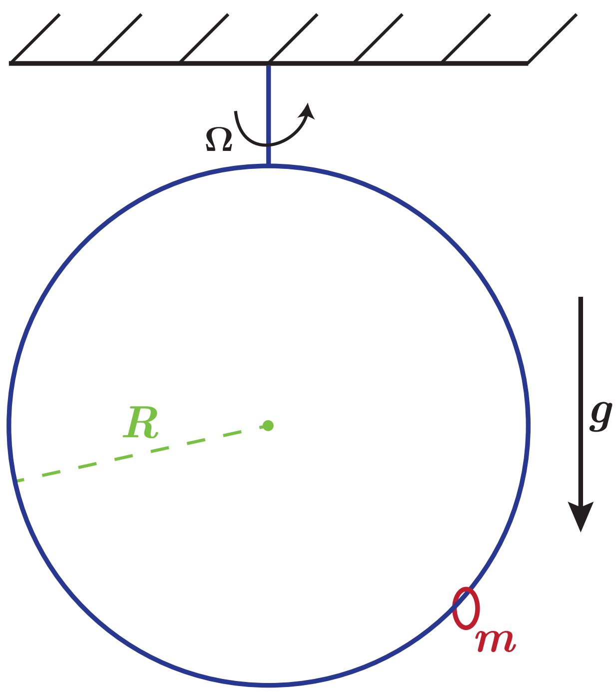

Figura 1: Péndulo de Andronov

P2.- **Lanzamiento de proyectil en un planeta de dos gravedades:** En un planeta extraño que tiene dos zonas con gravedad distinta (g y g') separadas por una línea vertical, se lanza un proyectil con rapidez inicial v_0 y ángulo inicial α. El cañón se encuentra a una distancia d de la zona de transición entre gravedades.

a) Encuentre la posición vertical en función de la distancia horizontal x del origen.

b) Encuentre la velocidad en función de x.

c) Encuentre los vectores tangente y normal en función de x.

d) **Propuesto:** Encuentre el ángulo $\alpha(g, g', v_0, d)$ óptimo, para el cual el proyectil recorre el la mayor distancia horizontal posible, cruzando los dos medios.

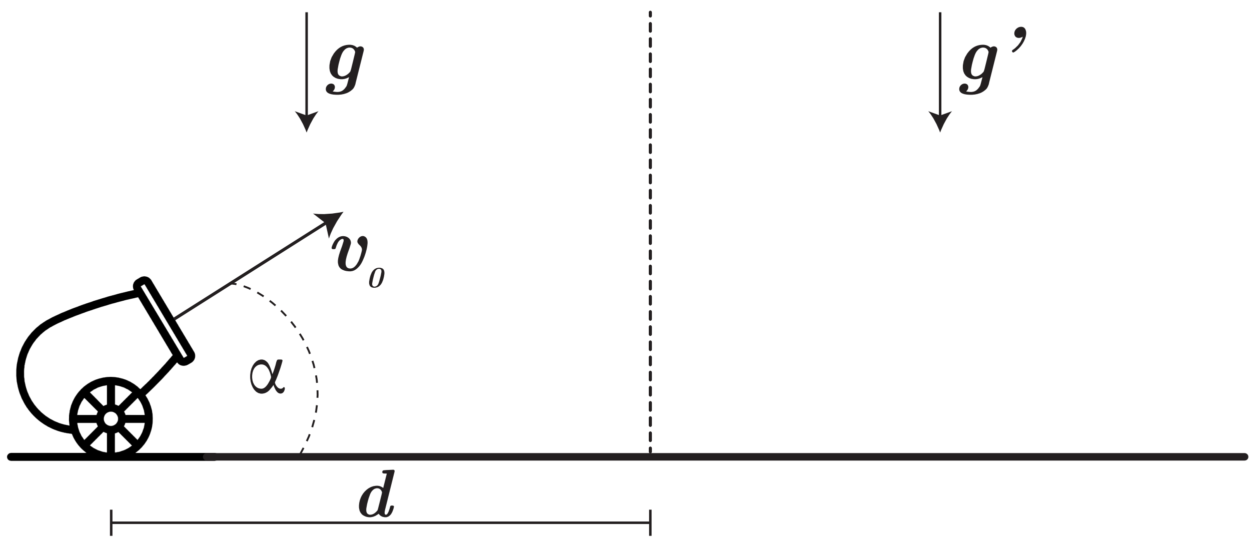

Figura 2: Proyectil en un planeta de dos gravedades

P3 (Propuesto).- **Partícula en una elipse (Parte 2):** Considere la partícula del problema propuesto del auxiliar 2, que se mueve sobre una elipse, siguiendo $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$, con a, b y ω constantes.

a) Encuentre los vectores $\hat{t}$ y $\hat{n}$ a la trayectoria, en función del tiempo.

b) Exprese la aceleración que siente la partícula en la base de coordenadas intrínsecas.

Coordenadas esféricas

La posición, velocidad, y aceleración en coordenadas esféricas puede ser expresada como:

$$\vec{r}(t) = r\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}$$

Vector tangente y normal

Se definen los vectores tangente $(\hat{t})$ y normal $(\hat{n})$ a la trayectoria , con $v = ||\vec{v}||$, como:

$$\hat{t} \equiv \frac{\vec{v}}{v} \qquad ; \qquad \hat{n} \equiv \left|\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right|\right|^{-1} \frac{d\hat{t}}{dt}$$

La velocidad angular del vector tangencial queda dada por:

$$\vec{\omega}_{\hat{t}} \equiv \left|\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right|\right| \hat{t} \times \hat{n}$$

La aceleración expresada en este sistema de coordenadas intrínsecas, donde $\rho_c = \frac{v}{\omega_{\hat{t}}}$ es el llamado radio de curvatura, es:

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}$$