Auxiliar 3

Coordenadas intrínsecas y dinámica

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.- Control 1 2023-1

Considere un tubo rígido con forma de una semi-elipse descrita por la ecuación

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1\,,$$

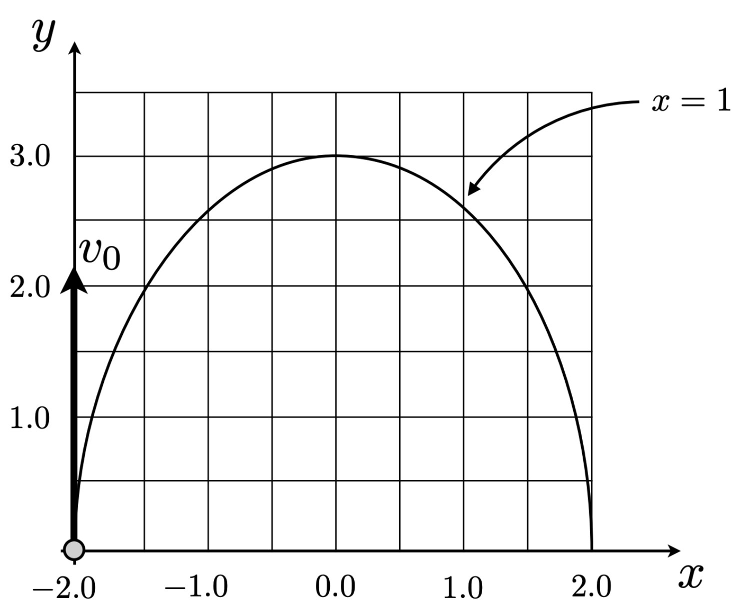
ver Figura. El tubo se encuentra fijo en un ambiente sin gravedad. Un anillo de masa m puede deslizar sin roce a lo largo del tubo. En el instante inicial el anillo se impulsa con rapidez v_0 desde uno de sus extremos ($x = -2$; $y = 0$). Para el instante cuando el anillo está pasando por el punto donde $x = 1$ determine:

a) Componente del vector velocidad a lo largo del eje x

b) Componente del vector velocidad a lo largo del eje y

c) Magnitud de la fuerza que el tubo ejerce sobre el anillo

d) Componente de la aceleración a lo largo del eje x



P2.- Control 1 2022-2

Una bolita de masa m se desliza sin roce por el interior de una copa. La superficie de la copa está descrita por la función $z = f(\rho)$ donde z y ρ son coordenadas cilíndricas y el eje vertical $\hat{k}$ es el eje de revolución de la copa (ver Figura). Se observa que la bolita se mueve describiendo **un círculo** y manteniendo **constante su altura**.

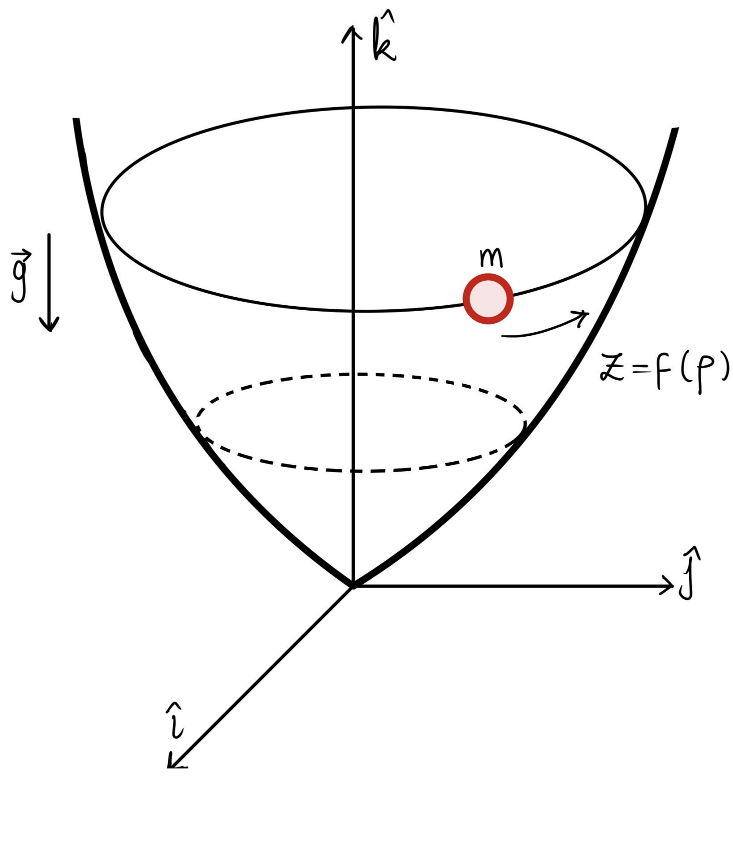
a) Dibuje el DCL de la bolita

b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas

c) Determine la velocidad angular ω de la bolita en términos de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho}$, el radio del círculo y otras constantes del problema

d) Considere los casos de una copa de martini ($z_m = \rho$) y en una de vino ($z_v = H\left(\frac{\rho}{R}\right)^2$). Determine la velocidad angular ω en cada caso

e) Si la altura de la bolita en ambas copas es la misma, señale en cuál de ellas la bolita tiene una mayor velocidad angular o si esto depende de alguna condición de los parámetros



Formulario

Coordenadas intrínsecas

La velocidad y aceleración en coordenadas intrínsecas están dadas por:

$$\vec{v} = v\hat{t}$$
$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho_c}\hat{n}\,.$$

En 2D, un plano (x, y), el vector tangente puede ser escrito en coordenadas cartesianas como

$$\hat{t} = \frac{\mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}\,,$$

el vector normal como

$$\hat{n} = \frac{\mathrm{d}y\,\hat{x} - \mathrm{d}x\,\hat{y}}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}\,,$$

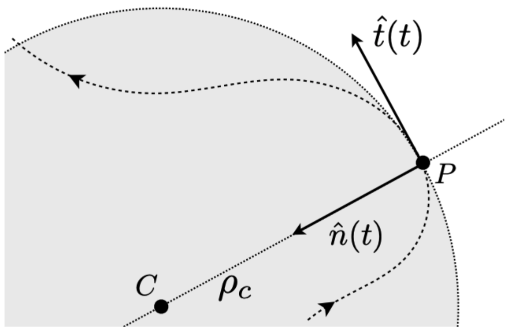
y el radio de curvatura como

$$\rho_c = \frac{1}{|y''|}\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}\,, \qquad \text{con} \qquad y' \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{y} \quad y'' \equiv \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

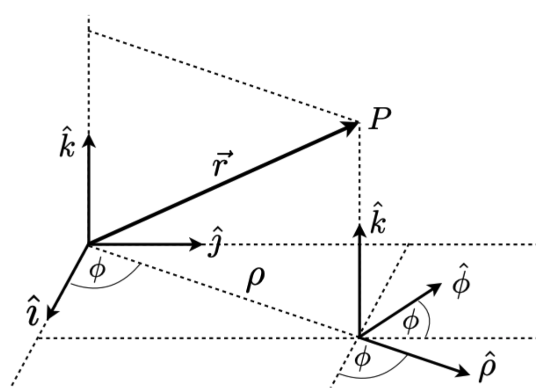
Coordenadas cilíndricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$



(a) Coord. intrínsecas



(b) Coord. cilíndricas