Auxiliar 1

Coordenadas cilíndricas y esféricas

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi

P1.-

Considere una curva espiral descrita **en coordenadas esféricas** por las ecuaciones:

$$r = R\,, \quad \phi = N\theta\,,$$

donde R y N son constantes conocidas (N entero par). Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el extremo superior ($\theta = 0$) y manteniendo una velocidad angular cenital constante y conocida, $\dot{\theta} = \omega_0$. Se pide:

a) Utilizando coordenadas esféricas, escriba los vectores velocidad y aceleración para una posición arbitraria de la partícula sobre su trayectoria.

b) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Indicación**: De ser difícil de calcular, puede dejar expresada la integral.

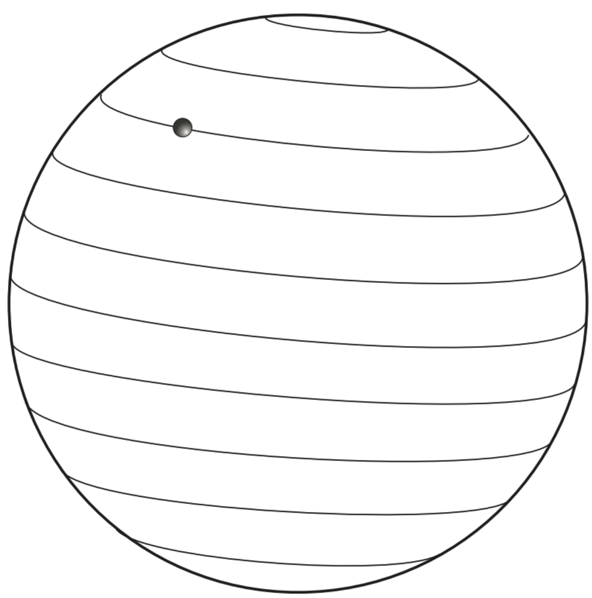


Figura 1: Pregunta 1

P2.- **[Propuesto]**

Considere una curva espiral cónica descrita en coordenadas esféricas por las ecuaciones:

$$\theta = \pi/4\,, \quad \phi = 2\pi\frac{r}{R}\,,$$

donde R es una constante conocida. Una partícula se mueve sobre la espiral partiendo desde el origen manteniendo una velocidad radial constante y conocida, $\dot{r} = c$. Se pide:

a) Determine la distancia radial del punto P en el cual la rapidez de la partícula es $3c$. Esta será la longitud radial máxima de la espira.

b) Encuentre una expresión para la longitud total de la espiral y para el tiempo que la partícula tarda en recorrerla. **Nota**: Está bien si deja su solución en términos de una integral muy complicada.

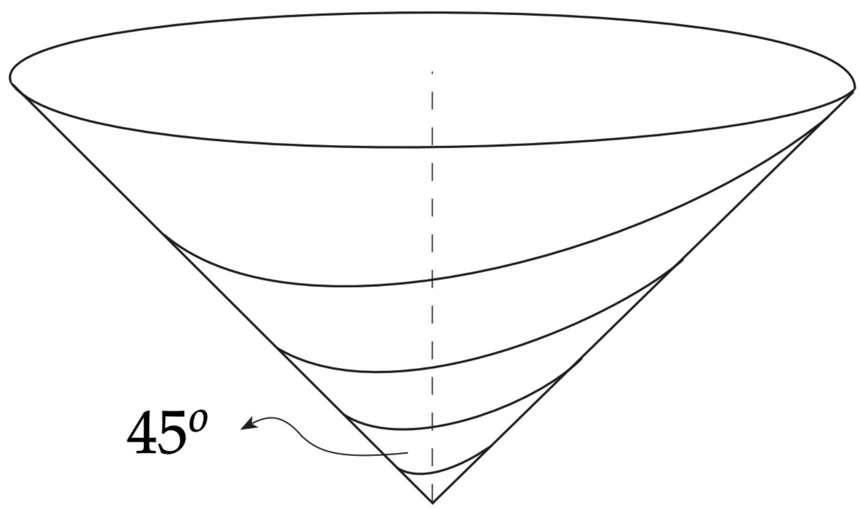


Figura 2: Pregunta 2

P3.- **El problema del pescador**

Luego de un largo día de trabajo, un pescador se dispone a la peligrosa misión diaria de cruzar un río de ancho D, partiendo desde A e intentando llegar al punto O en la orilla opuesta. El agua del río tiene una velocidad constante $\vec{v}_0$ en todo su ancho, por lo que el pescador debe remar con una velocidad $\vec{v}_p$ relativa al agua[1] y siempre apuntando a O como se observa en la Figura 3.

a) Usando coordenadas polares determine las ecuaciones de $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$ en función de r, θ, v_0 y v_p. Con estas ecuaciones exprese $\frac{dr}{d\theta}$ en función de los mismos parámetros.

b) Integre la expresión de *a)* para encontrar la trayectoria en función de θ, D y las velocidades enunciadas, ¿qué condición debe cumplir v_p para que el pescador pueda llegar a O?

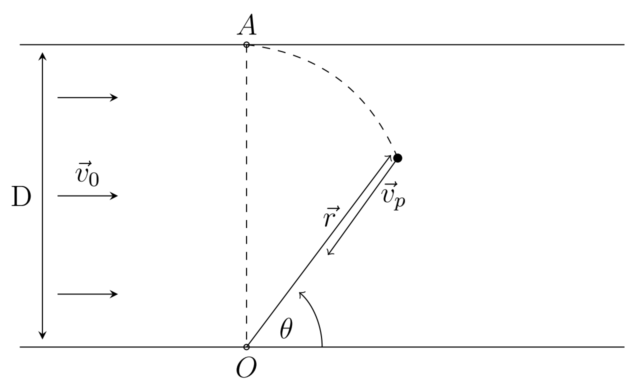


Figura 3: Pregunta 3

[1] Ojo con la diferencia entre la velocidad relativa a la orilla y relativa al agua

Formulario

Coordenadas cilíndricas

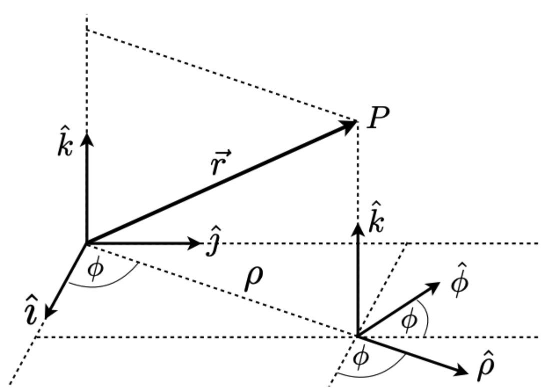
La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas cilíndricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \\
\vec{v} &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
&= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}
\end{aligned}$$

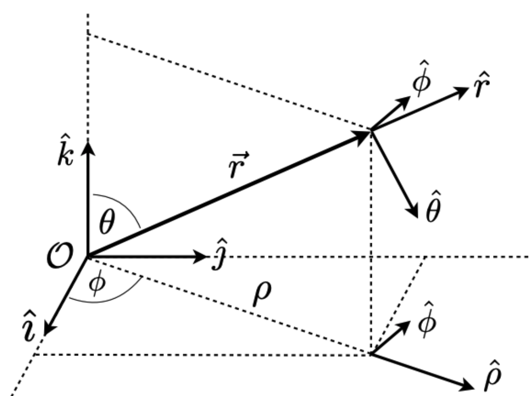
Coordenadas esféricas

La posición, velocidad y aceleración en **coordenadas esféricas** están dados por:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= r\hat{r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{\phi} \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}
\end{aligned}$$



(a) Coord. cilíndricas



(b) Coord. esféricas