Pauta Guía de ejercicios 1

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

Pregunta 1

a) **Ecuación de movimiento:** Utilizando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$F = ma$$
$$ma = -kx + bx^3$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + \frac{b}{m}x^3$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + \frac{b}{m}x^3$$

b) **Posición como función del tiempo, $x(t)$:** Se consigue integrando la expresión conseguida en (a)

c) **Condiciones para movimiento oscilatorio:** El movimiento será oscilatorio si el sistema es capaz de restaurar la posición inicial, lo cual depende de los valores de k y b. Para pequeñas amplitudes, el término $-kx$ domina, comportándose como un oscilador armónico simple.

Enunciado: Una partícula se mueve bajo la influencia de un campo potencial dado por $V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4$, donde α y β son constantes positivas.

Pregunta 2

a) **Ecuación de movimiento:** Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -bv$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v$$

Esta es la ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula.

b) **Solución para la posición $x(t)$:** Resolviendo la ecuación diferencial, encontramos:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

Integrando para obtener la posición:

$$x(t) = \int v_0 e^{-\frac{b}{m}t} dt = -\frac{mv_0}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)$$

c) **Velocidad como función del tiempo:**

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

d) **Tiempo para reducir la velocidad a la mitad:** Planteamos $v(t) = \frac{v_0}{2}$:

$$\frac{v_0}{2} = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$e^{-\frac{b}{m}t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{m}{b}\ln 2$$

Pregunta 3

a) **Grafique la función energía potencial:** Para graficar la función potencial, notar que, la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$ y mínimos locales dependiendo de los valores de α y β.

b) **Determine los puntos de equilibrio y clasifique su estabilidad:** Los puntos de equilibrio se encuentran donde la derivada de $V(x)$ es cero:

$$\frac{dV}{dx} = -2\alpha x + 4\beta x^3 = 0$$
$$x(4\beta x^2 - 2\alpha) = 0$$

Esto nos da $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}$. Para clasificar la estabilidad:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -2\alpha + 12\beta x^2$$
$$\text{En } x = 0 : -2\alpha \quad (\text{inestable si } \alpha > 0)$$
$$\text{En } x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} : 8\alpha \quad (\text{estable si } \alpha > 0)$$

c) **Calcule la energía mecánica:** La energía mecánica E de la partícula es la suma de su energía cinética T y potencial V, donde $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \alpha x^2 + \beta x^4$$

d) **Discuta los tipos de movimiento de la partícula de acuerdo al valor de su energía mecánica:** El tipo de movimiento dependerá del valor de la energía mecánica E:

- Si E es menor que el mínimo potencial, la partícula oscila entre dos puntos en los que $V(x) = E$.
- Si E es alto, puede haber escapes del potencial si $E > 0$ y los términos cuárticos no confinan la partícula.

Pregunta 4

a) **Formule la ecuación diferencial del movimiento:** El movimiento del sistema se puede describir por la siguiente ecuación diferencial, teniendo en cuenta la fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad:

$$F = ma = -kx - bv + F_0\cos(\omega t)$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\omega t)$$

Rearreglando términos, obtenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\omega t)$$

b) **Encuentre la solución particular del sistema:** La solución particular de esta ecuación diferencial puede buscarse asumiendo una solución de la forma $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Sustituyendo y utilizando métodos de coeficientes indeterminados o el método del operador diferencial, encontramos A y ϕ en términos de m, b, k, ω, y F_0.

c) **Determine la respuesta del sistema en régimen permanente y discuta los efectos de la resonancia:** La respuesta en régimen permanente es la parte de la solución que persiste con el tiempo y está dada por la solución particular. A medida que ω se aproxima a la frecuencia natural del sistema sin amortiguamiento $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la amplitud de la respuesta puede incrementarse significativamente, lo que se conoce como resonancia. El efecto del amortiguador es reducir la amplitud de la resonancia y desplazar la frecuencia de resonancia hacia frecuencias más bajas.

Pregunta 5

a) **Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo:** Las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas (v_r, v_θ, v_z) se calculan como sigue:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 2at,$$
$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = at^2\omega,$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = b.$$

La aceleración en coordenadas cilíndricas (a_r, a_θ, a_z) es:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2a - at^2\omega^2,$$
$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 2at\omega,$$
$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

b) **Determine si el movimiento de la partícula es acelerado radialmente en algún momento:** La aceleración radial es $a_r = 2a - at^2\omega^2$. El movimiento es acelerado radialmente siempre que $a_r > 0$, lo que ocurre si:

$$2a > at^2\omega^2$$
$$t^2 < \frac{2a}{a\omega^2}$$

Esto significa que la aceleración radial es positiva cuando $t < \sqrt{\frac{2}{\omega^2}}$, indicando que hay una aceleración radial hacia fuera durante este tiempo.

Pregunta 6

a) **Encuentre la velocidad de P en coordenadas esféricas para un tiempo cualquiera, en términos de R y ω_0:** En coordenadas esféricas, la velocidad $\mathbf{v}$ tiene componentes v_r, v_θ, y v_ϕ. La relación entre coordenadas cilíndricas y esféricas nos da:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{2\rho^2},$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right) = 45^\circ, \quad \text{constante},$$
$$\phi = \omega_0 t.$$

Diferenciando, obtenemos:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\rho\right) = \sqrt{2}\dot{\rho},$$
$$\dot{\theta} = 0, \quad \text{ya que } \theta \text{ es constante,}$$
$$\dot{\phi} = \omega_0.$$

Entonces, las componentes de la velocidad son:

$$\mathbf{v} = \sqrt{2}\dot{\rho}\hat{r} + \rho\omega_0\hat{\phi}$$

b) **Obtenga la velocidad angular de P con respecto al origen en coordenadas esféricas en términos de ω_0:** La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se define como:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

Utilizando $\mathbf{r} = r\hat{r}$ y $\mathbf{v}$ calculada anteriormente:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{r\hat{r} \times (\sqrt{2}\dot{\rho}\hat{r} + \rho\omega_0\hat{\phi})}{r^2}$$

Como $\hat{r} \times \hat{r} = 0$ y $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{\theta}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\rho\omega_0\hat{\theta}}{r} = \frac{\rho\omega_0}{\sqrt{2}\rho}\hat{\theta} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\hat{\theta}$$

Pregunta 7

a) **Calcule el gradiente del potencial y utilícelo para encontrar las fuerzas que actúan sobre la partícula:** El gradiente del potencial, ∇V, proporciona la dirección y magnitud de la fuerza más grande que actúa sobre la partícula en la dirección de incremento más rápido del potencial. Se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\nabla V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)\\ &= \left(2xy^2, 2yx^2, 2z\right).\end{aligned}$$

La fuerza que actúa sobre la partícula es entonces $-\nabla V$:

$$\vec{F} = -\nabla V = \left(-2xy^2, -2yx^2, -2z\right).$$

b) **Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas:** Utilizando la segunda ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, podemos escribir las ecuaciones de movimiento como:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -2xy^2, \\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= -2yx^2, \\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= -2z.
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones describen cómo varían la posición de la partícula en el espacio con respecto al tiempo bajo la influencia del campo de fuerzas derivado del potencial dado.

Pregunta 8

a) **Derive la energía potencial asociada con esta fuerza.** Para determinar la energía potencial $V(r)$ que corresponde a la fuerza $F(r) = -\frac{k}{r^3}$, se utiliza la relación entre la fuerza y la energía potencial, dada por $F(r) = -\frac{dV}{dr}$. Integrando la expresión de la fuerza, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
F(r) &= -\frac{k}{r^3}, \\
-\frac{dV}{dr} &= -\frac{k}{r^3}, \\
dV &= \frac{k}{r^3}\,dr, \\
V(r) &= -\int \frac{k}{r^3}\,dr = \frac{k}{2r^2} + C.
\end{aligned}
$$

Donde C es una constante de integración que generalmente se toma como cero en el contexto de fuerzas centrales. Por lo tanto, la energía potencial es $V(r) = \frac{k}{2r^2}$.

b) **Discuta las características de las órbitas posibles.** La forma de la energía potencial $V(r) = \frac{k}{2r^2}$ no es típica de los potenciales que cumplen con la condición de Bertrand, que garantiza órbitas cerradas y estables para todos los casos. Por lo tanto, las órbitas generadas por este potencial son generalmente no cerradas y pueden manifestarse como trayectorias espirales, ya sea hacia el centro o hacia el exterior, dependiendo de las condiciones iniciales específicas de energía y momento angular de la partícula:

- Si el momento angular es bajo y la energía total permite, la partícula puede formar un espiral hacia el centro.
- Si la energía es suficiente para superar el potencial efectivo mínimo, la partícula puede escapar en una trayectoria abierta.

Preguntа 9

a) **Encuentre la velocidad y la aceleración del satélite en cualquier punto de su órbita:** Las componentes de la velocidad en coordenadas polares, v_r y v_θ, son:

$$v_r = \frac{dr}{dt},$$
$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Utilizando la cadena de derivación, encontramos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right) = \frac{-pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$
$$v_r = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}.$$

La aceleración en coordenadas polares a_r y a_θ se calculan con:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$
$$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

b) **Calcule la energía total del satélite en función de sus elementos orbitales:** La energía total del satélite, E, es la suma de su energía cinética, T, y su energía potencial, V, que para un campo gravitatorio es:

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2\right),$$
$$V = -\frac{GMm}{r},$$
$$E = T + V = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{-pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \frac{GMm}{\frac{p}{1+e\cos\theta}}.$$

Aquí, G es la constante gravitacional universal y M es la masa de la Tierra. Este resultado muestra cómo la energía varía en función de la posición en la órbita y la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$.