

# Guía de ejercicios 1

**Profesor: Claudio Romero**  
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos  
Ayudantes: Felipe Pérez

## Dinámica en una dimensión

**Problema 1:** Una masa  $m$  está sujeta a una fuerza no lineal  $F = -kx + bx^3$  donde  $k$  y  $b$  son constantes positivas.

- a) Escriba la ecuación de movimiento para la masa.
- b) Encuentre la posición en función del tiempo,  $x(t)$ .
- c) Analice las condiciones bajo las cuales el movimiento es oscilatorio.

**Problema 2:** Una partícula de masa  $m$  se desplaza en una dimensión y está sujeta a una fuerza viscosa que es proporcional a la velocidad de la partícula. La fuerza viscosa opuesta al movimiento viene dada por  $F_v = -bv$ , donde  $b$  es el coeficiente de roce viscoso y  $v$  la velocidad de la partícula. Inicialmente, la partícula se encuentra en la posición  $x = 0$  con una velocidad  $v_0$ .

- a) Encuentre ecuaciones de movimiento.
- b) Encuentre la posición en función del tiempo,  $x(t)$ .
- c) Encuentre velocidad en función del tiempo.
- d) Calcule el tiempo necesario para reducir la velocidad a la mitad.

## Energía

**Problema 3:** Una partícula se mueve bajo la influencia de un campo potencial dado por  $V(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas.

- a) Grafique la función energía potencial.
- b) Determine los puntos de equilibrio y clasifique su estabilidad.
- c) Calcule la energía mecánica.
- d) Discuta los tipos de movimiento de la partícula de acuerdo al valor de su energía mecánica.

## Movimiento Armónico Forzado

**Problema 4:** Un sistema masa-resorte-damper está sujeto a una fuerza externa  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ . La masa  $m$ , la constante del resorte  $k$ , y el coeficiente de amortiguamiento  $b$  son conocidos.

- a) Formule la ecuación diferencial del movimiento.
- b) Encuentre la solución particular del sistema.
- c) Determine la respuesta del sistema en régimen permanente y discuta los efectos de la resonancia.

## Cinemática en 3D Cilíndricas

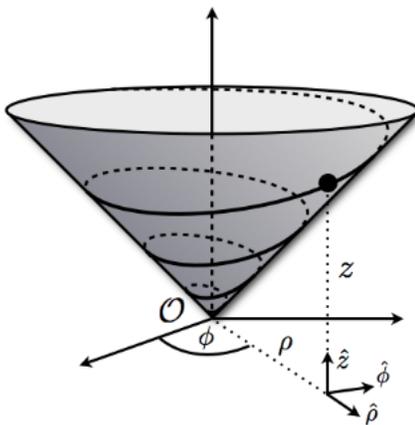
**Problema 5:** Una partícula se mueve en coordenadas cilíndricas según las leyes  $r(t) = at^2$ ,  $\theta(t) = \omega t$ , y  $z(t) = bt$  donde  $a$ ,  $b$ , y  $\omega$  son constantes.

- a) Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.
- b) Determine si el movimiento de la partícula es acelerado radialmente en algún momento.

## Cinemática en 3D Esféricas

**Problema 6:** Un punto P se mueve en una trayectoria que, descrita en coordenadas cilíndricas, satisface  $z(t) = \rho(t)$ ,  $dz = R d\phi$  y  $\phi = \omega_0 t$ . Se trata de una trayectoria apoyada en una superficie cónica, como lo indica la figura. Para  $t = 0$  se cumple  $z = 0$ .

- (a) Encuentre la velocidad de P en coordenadas esféricas para un tiempo cualquiera, en términos de  $R$  y  $\omega_0$
- (b) Obtenga la velocidad angular de P con respecto al origen en coordenadas esféricas en términos de  $\omega_0$ .



Hint: La velocidad angular es  $\omega = r \times v / \|r\|^2$

## Fuerzas y energía en 3D

**Problema 7:** Una partícula se mueve bajo un potencial tridimensional  $V(x, y, z) = x^2y^2 + z^2$ .

- a) Calcule el gradiente del potencial y utilícelo para encontrar las fuerzas que actúan sobre la partícula.
- b) Escriba las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas.

## Fuerzas Centrales

**Problema 8:** Una partícula de masa  $m$  está sometida a una fuerza central proporcional a  $-\frac{k}{r^3}$ .

- a) Derive la energía potencial asociada con esta fuerza.
- b) Discuta las características de las órbitas posibles.

## Órbitas

**Problema 9:** Un satélite se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La ecuación de su trayectoria en coordenadas polares es  $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$ , donde  $p$  es el parámetro semilatus rectum y  $e$  la excentricidad.

- a) Encuentre la velocidad y la aceleración del satélite en cualquier punto de su órbita.
- b) Calcule la energía total del satélite en función de sus elementos orbitales.