Ejercicio 5

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

Pregunta 1:

Encuentre las componentes cartesianas de la fuerza en los siguientes casos (donde V es la energía potencial).

- a)$V = axy^2z^3$
- b)$V = \frac{kr^2}{2}$
- c)$V = \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2)$

Escriba las ecuaciones de movimiento en los casos (b) y (c). ¿Cuál es la solución del caso (c) para condiciones de borde arbitrarias?

Pregunta 1:

Encuentre las componentes cartesianas de la fuerza en los siguientes casos (donde V es la energía potencial).

- a)$V = axy^2z^3$

Utilizando :

$$F = -\nabla V = \left(\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz} \right)$$

a)

$$\frac{dV}{dx} = ay^2z^3$$

$$\frac{dV}{dy} = 2axyz^3$$

$$\frac{dV}{dz} = 3axy^2z^2$$

$$\therefore \quad F = -ay^2z^3\,\hat{x} - 2axyz^3\,\hat{j} - 3axy^2z^2\,\hat{z}$$

Pregunta 1:

Encuentre las componentes cartesianas de la fuerza en los siguientes casos (donde V es la energía potencial).

- a) $V = axy^2z^3$
- b) $V = \frac{kr^2}{2}$

tenemos que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

usando nuevamente $F = -\nabla V$

$$\frac{dV}{dx} = 2Kx$$

$$\frac{dV}{dy} = 2Ky$$

$$\frac{dV}{dz} = 2Kz$$

$$F = -2K\left(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\right)$$

Ecuacion de mov

$$ma = F$$

$$m(\ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}) = -2K(x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z})$$

ó $$m\ddot{r} = -2K r$$

ó $$m\ddot{x} = -2xK$$

$$m\ddot{y} = -2yK$$

$$m\ddot{z} = -2zK$$

Pregunta 1:

Encuentre las componentes cartesianas de la fuerza en los siguientes casos (donde V es la energía potencial).

- a)$V = axy^2z^3$
- b)$V = \frac{kr^2}{2}$
- c)$V = \frac{1}{2}(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2)$

Escriba las ecuaciones de movimiento en los casos (b) y (c). ¿Cuál es la solución del caso (c) para condiciones de borde arbitrarias?

Nuevamente $F = -\nabla V$

$$\frac{dV}{dx} = K_x x$$

$$\frac{dV}{dy} = K_y y$$

$$\frac{dV}{dz} = K_z z$$

$$\therefore F = -K_x \hat{x} - K_y y \hat{y} - K_z z \hat{z}$$

Calculando Ec de mov

$$ma = F$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -K_x\, x \qquad \hat{x}$$

$$m\ddot{y} = -K_y\, y \qquad \hat{y}$$

$$m\ddot{z} = -K_z\, z \qquad \hat{z}$$

Solución:

$$m\ddot{x} = -K\, x$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}\, x = 0$$

oscilador armonico simple

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$z(t) = E\cos(\omega t) + F\sin(\omega t)$$

Imponemos c. de borde para encontrar

$$A, B, C, D, E, F$$

Por ejemplo:

$x(0) = 1 \qquad \dot{x}(0) = 0$

$$x(0) = 1 = A$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega \sin(0) + B\omega \cos(0) = 0$$

$$B = 0$$

$$\therefore \quad x(t) = \cos(\omega t)$$

Lo mismo para $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $z(0)$ y $\dot{z}(0)$

$$y(t) = \cos(\omega t)$$

$$z(t) = \cos(\omega t)$$

$$\boxed{\therefore \ \vec{r}(x,y,z) = \cos(\omega t)\,\hat{x} + \cos(\omega t)\,\hat{y} + \cos(\omega t)\,\hat{z}}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$