

Auxiliar 13

Fuerzas Conservativas, Trabajo y Energía

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

Pregunta 1:

El objetivo de este problema es obtener la posición en torno a un angulo de un planeta de masa m bajo un potencial gravitacional $V(r) = \frac{-GMm}{r}$ en todo instante de tiempo.

- a) Calcule la fuerza F asociada potencial.
- b) Utilice la segunda ley de Newton.
- c) Resuelva la expresión del problema (b) asumiendo que $\ddot{r} = 0$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ y concluya.

$$\omega \dot{\theta} = cte$$

Calculando

a) Usamos: $F = -\nabla \cdot U$

$\therefore \nabla$ notamos que estamos en esferas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= -G M_m \cdot \left(\frac{1}{r} \right)' = -G M_m \cdot - \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{G M_m}{r^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dU}{d\phi} = 0$$

$$\therefore F = - \left(\frac{G M_m}{r^2} \right) \hat{r}$$

b) Utilice ley de Newton:

$$ma = \Sigma F$$

tenemos: en esfericas

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta)}_{\frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)} \hat{\phi}$$

$$\Sigma F = \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

$$\therefore m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$$

- c) Resuelva la expresión del problema (b) asumiendo que $\ddot{r} = 0$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ y concluya.

asuma que $\ddot{r} = 0$ y $\phi = cte$
 $\Rightarrow \dot{\phi} = 0$

$$\therefore m(\cancel{\ddot{r}} - r\cancel{\dot{\phi}^2} \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \theta = t \cdot \alpha$$

$$\rightarrow r(\alpha t)^2 = \frac{GM}{\alpha \cdot t}$$

$\Rightarrow$

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{GM}{\alpha t}}$$

La posición del planeta en todo t .