Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001-1 – Curso

Auxiliar 12

Fuerzas, Trabajo y Energía

Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

Pregunta 1:

Calcule las fuerzas asociadas a las siguientes energías potenciales:

- a) $U(x, y, z) = k(x^2 + y2 + z^2)$
- b) $U(\rho) = Ae^{-k\rho}$
- c) $U(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Determine si las siguientes fuerzas son conservativas:

- a) $F_1 = -F_0(y\hat{x} + x\hat{y})$
- b) $F_2 = (xy + z)\hat{x} + 2xy\hat{y} + 3xln(z)\hat{z}$
- c) $F_3 = r\hat{r} + r^2\hat{\phi}$

Propuesto: Encuentre la función energía potencial asociada a la fuerza

$$\vec{F} = A(x^2\hat{x} + y\hat{y})$$

Pregunta 2:

Considere el siguiente campo de fuerzas:

$$\vec{F} = -F_0(1 - \frac{x^2}{L^2})\hat{y}$$

Calcule el trabajo que realiza esta fuerza cuando una partícula es sometida a esta mientras recorre el borde de un cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (0, L), (L, L) y (L, 0).

Pregunta 3:

Una partıcula P de masa m está obligada a moverse sin roce en una superficie cónica de ángulo $\pi/4$. El sistema está muy lejos de la Tierra, no hay peso. P comienza su movimiento a distancia r_0 del vértice superior, con rapidez perpendicular al eje Z y velocidad angular inicial $\dot{\phi}(0) = \omega_0$. Hay una fuerza de atracción que el eje Z ejerce sobre la partícula . En coordenadas cilíndircas esta fuerza es:

$$\vec{F} = \frac{-B\hat{\rho}}{-\rho^2}$$

Donde B es una constante conocida suficientemente grande para que, dadas las condiciones iniciales, P no pueda despegarse del cono. No hay pérdida de generalidad si se toma que $B = mr_0^3\omega_0^3 b$, donde b es una constante adimensional.

- a) a) Determine si $\vec{F}$ es o no una fuerza conservativa.

- c) Escriba la energía mecánica total en términos de r y de $\dot{r}$.

Propuesto: ¿Existen soluciones en que r está acotado entre dos valores, r_{max} y r_{min}?. ¿Qué condición debe imponerse sobre b?

"El éxito es la suma de pequeños esfuerzos"

Fuerza asociada a un potencial:

Conocemos : $\vec{F} = \frac{d}{dx} U(x)$

Pero cómo lo hacemos si hay más dimensiones, o el problema es mas simple en otro tipo de coordenadas?

Utilizamos lo siguiente:

Gradiente $\nabla \cdot$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla \cdot U}$$

- Cartesianas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

- Cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

- Esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Para que una fuerza F sea conservativa se debe cumplir lo siguiente:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{F}\, dr = 0 \iff \nabla \times \vec{F} = 0}$$

Rotor $\nabla \times$

- Cartesianas:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x\right)\hat{z}$$

- Cilíndricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}$$

- Esféricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r\mathrm{sen}(\theta)}\left(\frac{\partial(F_\phi \mathrm{sen}(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$

- Conservan la Energia $E = K + U = cte$
- Fuerzas No conservativas: F. Roce

  F. Magnetica

Trabajo:

$$\boxed{W = \int_{\Gamma} \vec{F}\, d\vec{r}}$$

Si $\vec{F}$ es conservativa $\Rightarrow W = 0$

Pregunta 1:

Calcule las fuerzas asociadas a las siguientes energías potenciales:

- a) $U(x,y,z) = k(x^2 + y2 + z^2)$

Usando

$$F = -\nabla U = -\left(\frac{d}{dx} U \hat{x} + \frac{d}{dy} U \hat{y} + \frac{d}{dz} U \hat{z} \right)$$

$$= -\left(2K\, x\, \hat{x} + 2K y\, \hat{y} + 2K z\, \hat{z} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -2K\left(x\, \hat{x} + y\, \hat{y} + z\, \hat{z} \right)}$$

Pregunta 1:

Calcule las fuerzas asociadas a las siguientes energías potenciales:

- a) $U(x,y,z) = k(x^2 + y2 + z^2)$

- b) $U(\rho) = Ae^{-k\rho}$

$$F = -\nabla U(\rho)$$

• notar sistema de coordenadas cilíndricos.

$$\vec{F} = -\left(\frac{dU}{d\rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\theta} \hat{\theta} + \frac{dU}{dz} \hat{k} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -Ae^{-K\rho}(-K)\hat{\rho} = KAe^{-K\rho}\hat{\rho}}$$

Pregunta 1:

Calcule las fuerzas asociadas a las siguientes energías potenciales:

- a) $U(x, y, z) = k(x^2 + y2 + z^2)$
- b) $U(\rho) = Ae^{-k\rho}$
- c) $U(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$F = -\nabla U(r)$$

en esfericas:

$$\vec{F} = -\left(\frac{dU}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\frac{dU}{d\phi}\hat{\phi} \right)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

Determine si las siguientes fuerzas son conservativas:

- a) $F_1 = -F_0(y\hat{x} + x\hat{y})$

Si $\nabla \times F = 0 \iff F$ conservativa

$$\nabla \times F_1 = \left(\cancel{\frac{dF_z}{dy}} - \cancel{\frac{dF_y}{dz}}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\frac{dF_x}{dz}} - \cancel{\frac{dF_z}{dx}}\right)\hat{y} + \left(\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy}\right)\hat{z}$$

$F_x = -F_0 y$

$F_y = -F_0 x$

$F_z = 0$

$$\nabla \times F = \left(-F_0 - -F_0\right)\hat{z} = 0$$

$\boxed{\therefore\ F_1 \text{ es conservativa}}$

↳ conserva la energía

Determine si las siguientes fuerzas son conservativas:

- a) $F_1 = -F_0(y\hat{x} + x\hat{y})$
- b) $F_2 = (xy + z)\hat{x} + 2xy\hat{y} + 3xln(z)\hat{z}$

Veamos $\nabla \times F_2$

$F_x = xy + z$

$\therefore \frac{dF_x}{dy} = x \qquad \frac{dF_x}{dz} = 1$

$F_y = 2xy$

$\therefore \frac{dF_y}{dx} = 2y \qquad \frac{dF_y}{dz} = 0$

$F_z = 3x\ln(z)$

$\therefore \frac{dF_z}{dx} = 3\ln(z) \qquad \frac{dF_z}{dy} = 0$

$\therefore \nabla \times F_2 = \left(\cancel{\frac{dF_z}{dy}} - \cancel{\frac{dF_y}{dz}}\right)\hat{x} + \left(\frac{dF_x}{dz} - \frac{dF_z}{dx}\right)\hat{y} + \left(\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy}\right)\hat{z}$

$$\boxed{\nabla \times F_2 = (1 - 3\ln(z))\hat{y} + (2y - x)\hat{z} \neq 0}$$

Determine si las siguientes fuerzas son conservativas:

- a) $F_1 = -F_0(y\hat{x} + x\hat{y})$
- b) $F_2 = (xy + z)\hat{x} + 2xy\hat{y} + 3xln(z)\hat{z}$
- c) $F_3 = r\hat{r} + r^2\hat{\phi}$

$\nabla \times F_3$ en esfericas:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r\text{sen}(\theta)}\left(\frac{\partial(F_\phi \text{sen}(\theta))}{\partial\theta} - \cancel{\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}}^{0}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{sen}(\theta)}\cancel{\frac{\partial F_r}{\partial\phi}}^{0} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}}^{0} - \cancel{\frac{\partial F_r}{\partial\theta}}^{0}\right)\hat{\phi}$$

$F_r = r \qquad F_\theta = 0 \qquad F_\phi = r^2$

$\therefore \quad \frac{dF_r}{d\phi} = 0 \qquad \frac{dF_r}{d\theta} = 0$

$\therefore \quad \frac{dF_\phi}{dr} = 2r \qquad \frac{dF_\phi}{d\theta} = 0$

$$\boxed{\nabla \times F_3 = \frac{1}{r\,\text{sen}(\theta)}\left(r^2\cos(\theta)\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(3r^2\right)\hat{\theta}}$$

Propuesto: Encuentre la función energía potencial asociada a la fuerza

$$\vec{F} = A(x^2\hat{x} + y\hat{y})$$

$$\boxed{U(x,y) = -A\frac{x^3}{3} - A\frac{y^2}{2} + C}$$

Pregunta 2:

Considere el siguiente campo de fuerzas:

$$\vec{F} = -F_0(1 - \frac{x^2}{L^2})\hat{y}$$

Calcule el trabajo que realiza esta fuerza cuando una partícula es sometida a esta mientras recorre el borde de un cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (0, L), (L, L) y (L, 0).

Recordemos que el trabajo es:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

curva o trayectoria

Veamos primero si hay trabajo:

$$\nabla \times F \neq 0 \Rightarrow W \neq 0$$

$$F_y = -F_0\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

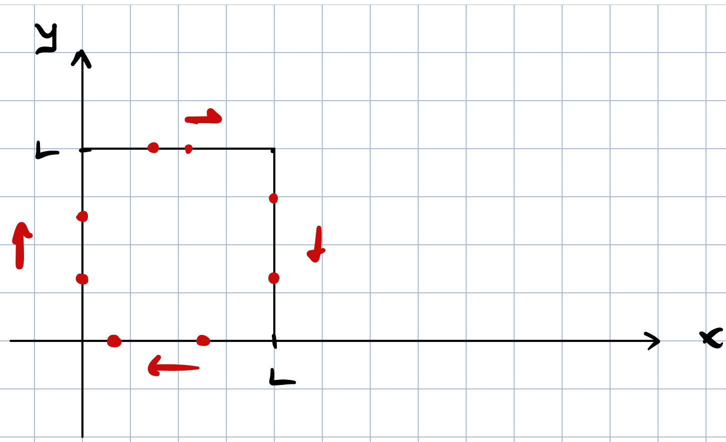
$$\frac{F_y}{dx} = \frac{2F_0 x}{L^2} \qquad \frac{dF_y}{dz} = 0$$

$$F_x = 0 \wedge F_z = 0$$

$$\boxed{\therefore \nabla \times F = \frac{2F_0 x}{L^2}\hat{z}}$$

• Al tener que $\nabla \times F \neq 0$ tenemos que si se realizo trabajo.

Calcule el trabajo que realiza esta fuerza cuando una partícula es sometida a esta mientras recorre el borde de un cuadrado cuyos vértices son (0, 0), (0, L), (L, L) y (L, 0).



Utilizamos :

$$W = \int_{T} \vec{F}\, d\vec{r}$$

integral de linea!

↳ Integrar por tramos

$(0,0) \rightarrow (0,L)$

en este caso $x = 0 \Rightarrow \vec{F} = -F_0\,\hat{y}$

$\therefore\ d\vec{r} = \cancel{dx\,\hat{x}} + dy\,\hat{y}$

Así:

$$W = \int_{y=0}^{y=L} F \, dy \, \hat{y}$$

$$w = \int_0^L -F_0 \, \hat{y} \, dy \, \hat{y}$$

$$w = -F_0 \, (y)_0^L = -F_0 L$$

$$\boxed{W_{(0,0)\text{ a }(0,L)} = -F_0 L}$$

Segundo tramo

$(0,L) \rightarrow (L,L)$ $\qquad y = L$

$$d\vec{r} = dx \, \hat{x}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F \, \hat{y} \, dx \, \hat{x} = 0$$

perpendiculares

$= 0$

$$\therefore \boxed{W_{(0,L)\to(L,L)} = 0}$$

Vamos por Caso 3:

$(L,L) \to (L,0) \quad x = L$

$$\therefore \ F = -F_0\left(1-1\right)\hat{y} = 0$$

$$\therefore \ W = \int \cdot 0 \, dy = 0$$

$$\boxed{W_{(L,L)\to(L,0)} = 0}$$

Finalmente :

$(L,0) \to (0,0)$: temos

$y = 0$

similar o caso 2

$$\therefore \boxed{W_{(L,0)\to(0,0)} = 0}$$

Ahora el trabajo total realizado es:

$$W = \int_T F\,dy$$

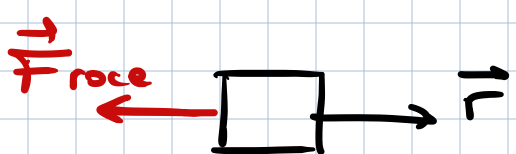
$$= \int_{(0,0)}^{(0,L)} \cdots + \int_{(0,L)}^{(\ \ )} + \int + \int$$

$$\therefore \quad \boxed{W_{Tot} = - F_0 L}$$

cuando $W < 0$

- La fuerza aplicada va en sentido contrario al desplazamiento.

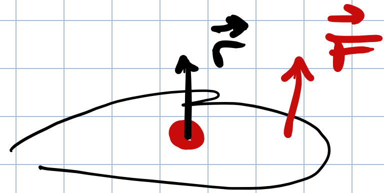
Ej: Fuerza de roce



Cuando $\omega > 0$:

$\vec{F}$ y $\vec{r}$ apuntan en la misma dirección:

Ej: Levantar una partícula en la mano



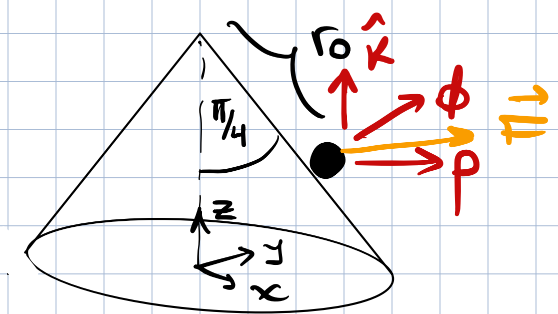
Pregunta 3:

Una partıcula P de masa m está obligada a moverse sin roce en una superficie cónica de ángulo $\pi/4$. El sistema está muy lejos de la Tierra, no hay peso. P comienza su movimiento a distancia r_0 del vértice superior, con rapidez perpendicular al eje Z y velocidad angular inicial $\dot{\phi}(0) = \omega_0$. Hay una fuerza de atracción que el eje Z ejerce sobre la partícula . En coordenadas cilíndircas esta fuerza es:

$$\vec{F} = \frac{-B\hat{\rho}}{\rho^2}$$

Donde B es una constante conocida suficientemente grande para que, dadas las condiciones iniciales, P no pueda despegarse del cono. No hay pérdida de generalidad si se toma que $B = mr_0^3\omega_0^3 b$, donde b es una constante adimensional.

- a) Determine si $\vec{F}$ es o no una fuerza conservativa.



a) determine si F conserva:

$$\vec{F} = -\frac{B}{\rho}\,\hat{\rho}$$

se debe cumplir: $\nabla \times F = 0$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\cancel{\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi}} - \cancel{\frac{\partial F_\phi}{\partial z}}\right)\hat{\rho} + \left(\cancel{\frac{\partial F_\rho}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial F_z}{\partial \rho}}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\cancel{\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho}} - \cancel{\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}}\right)\hat{z}$$

$$F_\rho = -\frac{B}{\rho^2} \qquad F_\phi = 0 \qquad F_z = 0$$

$$\frac{dF_\rho}{d\phi} = 0 \qquad \frac{dF_\rho}{dz} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla \times F = 0 \;//$$

• b) Escriba la energía mecánica total en términos de r y de $\dot{r}$.

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2} m |\dot{\vec{r}}|^2 + U$$

$$\vec{f} = -\frac{\beta}{\rho^2}\hat{\rho} \implies \vec{F} = -\nabla U_f$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{dU}{d\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\theta}\hat{\theta} + \frac{dU}{dz}\hat{z}\right)$$

$\therefore$ dado que $F = -\frac{\beta}{\rho}\hat{\rho}$

$\hat{\rho}$

$$\implies -\frac{\beta}{\rho^2} = -\frac{dU}{d\rho} \quad / \int$$

$$-\beta \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho} dU$$

$$-\beta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) = U_f(\rho) - U_f(\rho_1)$$

Para simplificar podemos usar

$$\rho_1 \to \infty \Rightarrow U_f(\rho_1) = 0$$

$$\therefore \quad U(\rho) = -\frac{B}{\rho}$$

pero el enunciado nos pide en función de r y $\hat{r}$

$\Rightarrow$ cambio de sistemas

recordar

$$\rho = r \operatorname{sen}(\theta)$$

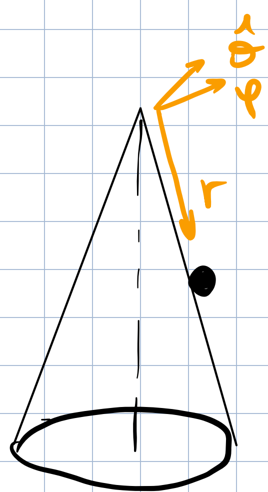
$$\rho = r \operatorname{sen}(\pi/4) = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\therefore \quad U(r) = -\frac{B}{\sqrt{2}} r}$$

$$E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U(r)$$

Queremos $|\vec{v}|$ en funcion de r y $\dot{r}$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}\,\text{sen}(\theta) + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$



$r(0) = r_0$

$\dot{\varphi}(0) = \omega_0$

$\theta = \pi/4$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\varphi}\,\text{sen}(\pi/4)\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\varphi}\,\text{sen}(\pi/4)\,\hat{\varphi}$$

Mucho ojo :

$$|\vec{v}| \neq \vec{v}$$

$$|\vec{v}|^2 = \dot{r}^2 + \left(r\dot{\varphi}\sqrt{2}\right)^2$$

Así entonces:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \left(r \dot{\varphi} \sqrt{2} \right)^2 \right) - \frac{B}{\sqrt{2}} r}$$