Auxiliar 9

Preparacion C1

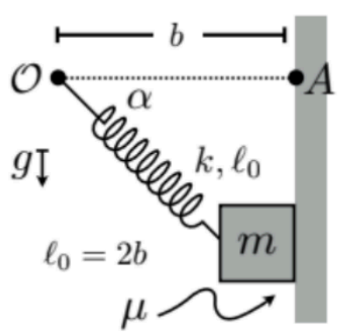
Profesor: Claudio Romero
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

P1.- Una partícula de masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. El otro extremo está fijo en el punto O, tal como muestra la figura. La distancia entre O y la pared es b y el largo natural del resorte es $l_0 = 2b$. Entre la partícula y la pared existe un roce caracterizado por el coeficiente de roce estático μ. Considere que $k = 2mg/b$.

(a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que, al dejar la partícula en reposo en A, esta comience a descender?

(b) Si μ cumple con la condición anterior y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α. Indique el valor de este en el instante en que la partícula se separa de la pared.

(c) Determine el trabajo realizado por la fuerza de roce desde que la masa fue liberada hasta que se despega de la superficie.



Considere que el roce estático es $f = \mu N$ con N la normal de la pared y que:

$$\int \frac{d\theta}{cos(\theta)} = ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

P2. **Movimiento Forzado**

El eje de una rueda de radio R se encuentra a una distancia $3l + R$ del origen del sistema, donde hay una pared. La rueda gira con velocidad angular constante Ω_0, manteniendo en movimiento un pistón a lo largo del eje horizontal a través de una barra de largo $l >> R$, tal como se muestra en la siguiente figura:

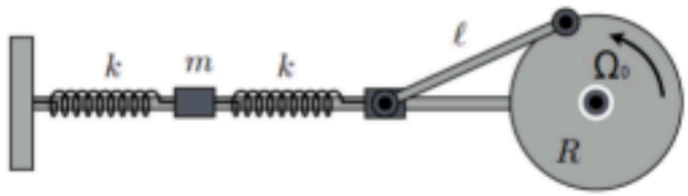


Figura 1: Pistones y resortes

El pistón se mantiene conectado a otro pistón de masa m, también confinado a la horizontal, mediante un resorte de constante elástica k y largo natural l. Otro resorte idéntico mantiene a la masa unida a la pared. En $t = 0$ el eje que une a la barra con la rueda se encuentra en la posición horizontal a una distancia $3l$ de la pared.

(a) Encuentre una expresión para la posición del pistón x_p en función del tiempo considerando que $l >> R$

(b) Deduzca la ecuación de movimiento para la masa m. Determine el valor de Ω_0 para que el sistema entre en resonancia.

(c) Si la partícula inicialmente está en la posición $x(0) = l$ y se le aplica una rapidez $\dot{x}(0) = \frac{\omega_0 R}{2}$ (ω_0 frecuencia natural del sistema), encuentre $x(t)$ para el caso de resonancia perfecta.

P3. Una partícula se mueve sujeta a la acción de una fuerza conservativa cuya función energía potencial es:

$$U(x) = U_0\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

(1)

donde U_0 y a son constantes positivas.

i) Grafique la función $U(x)$.

ii) Encuentre los puntos de equilibrio.

iii) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estables.

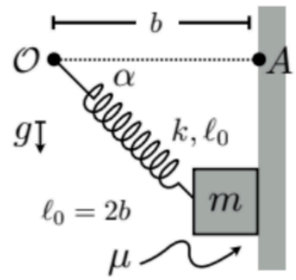
iv) Cuando inicialmente la partícula se encuentra en $x > 0$ y su energía mecánica es 5 U_0, encuentre los puntos de retorno.

P1.- Una partícula de masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. El otro extremo está fijo en el punto O, tal como muestra la figura. La distancia entre O y la pared es b y el largo natural del resorte es $l_0 = 2b$. Entre la partícula y la pared existe un roce caracterizado por el coeficiente de roce estático μ. Considere que $k = 2mg/b$.

(a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que, al dejar la partícula en reposo en A, esta comience a descender?

(b) Si μ cumple con la condición anterior y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α. Indique el valor de este en el instante en que la partícula se separa de la pared.

(c) Determine el trabajo realizado por la fuerza de roce desde que la masa fue liberada hasta que se despega de la superficie.

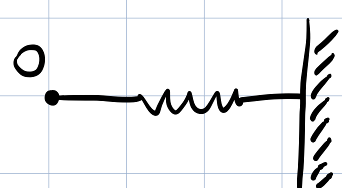


Considere que el roce estático es $f = \mu N$ con N la normal de la pared y que:

$$\int \frac{d\theta}{cos(\theta)} = ln\left(tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

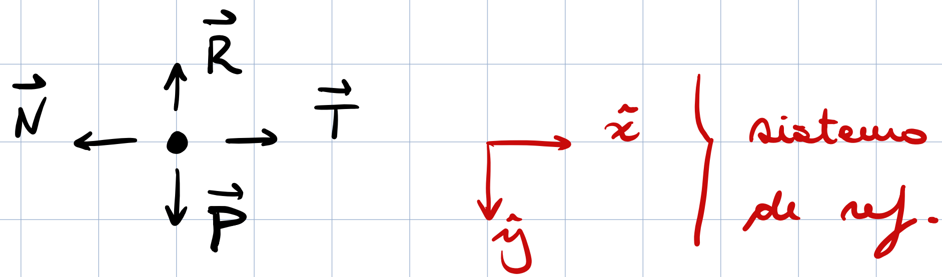
(a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que, al dejar la partícula en reposo en A, esta comience a descender?

En reposo en A:



¿Queremos una condición para que empiece a descender?

→ Veamos las fuerzas:



Usando 2do ley de Newton:

$$ma = \sum F$$

$$m\vec{a} = T\hat{x} - N\hat{x} + P\hat{y} - R\hat{y}$$

Separando en $\hat{x}$ y $\hat{y}$

$\underline{\underline{\hat{x}}}$

$T - N = ma_x$

queremos que esté pegado a la pared

$\therefore \quad T - N = 0$

$\underline{\underline{\hat{y}}}$

$P - R = ma_y$

queremos que $a_y \geq 0$

$\therefore \quad \dfrac{P-R}{m} \geq 0$

reemplazando :

$P = mg$

$R = \mu \cdot N$ (recordar)

Pero podemos obtener N

$T = N$

$N = -K(x - l_0)$

como estamos en el caso inicial para que empiece a moverse:

Sabemos que $x = b$ en ese punto, además $l_0 = 2b$

$\therefore \quad N = -K(b - 2b)$

$N = Kb$

Sabemos que $R = \frac{2mg}{b}$

$\therefore \quad N = 2mg$

Así entonces:

$$R = 2mg\mu$$

$\therefore$ La condición es:

$$\frac{\cancel{m}g - 2\cancel{m}g\mu}{\cancel{m}} > 0$$

$$g > 2g\mu$$

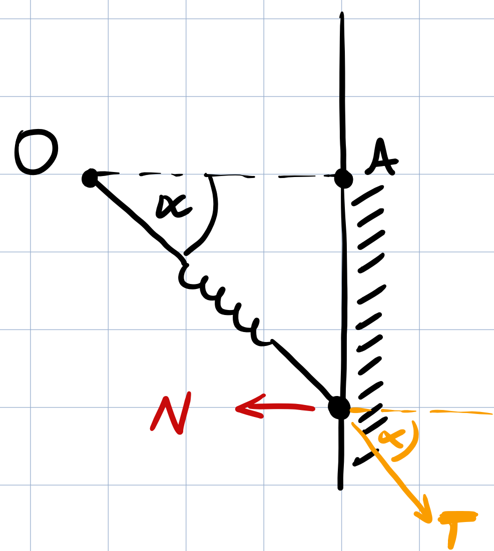
$$\boxed{\frac{1}{2} > \mu}$$

Se tiene lo pedido.

(b) Si μ cumple con la condición anterior y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α. Indique el valor de este en el instante en que la partícula se separa de la pared.

si $\mu = \frac{1}{2}$ Queremos det N:

Ahora tenemos un cambio ya que:



$$\therefore \vec{T} = \cos(\alpha) T \ \hat{x} + \sin(\alpha) T \ \hat{y}$$

tenemos misma condición de que

$$a_x = 0$$

$$\vec{T} - \vec{N} = 0$$

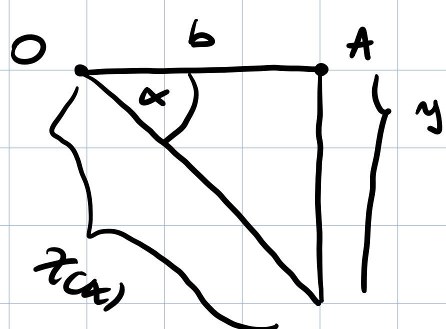
$$\cos(\alpha)\, T = N$$

$$N = -K(x - l_0)\cos(\alpha)$$

nos basta encontrar:

$$x = x(\alpha)$$

Viendo la geometría:



tenemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{r}$$

$$\therefore \quad r = \frac{b}{\cos(\alpha)}$$

Reemplazamos en

$$N = -k\left(\frac{b}{\cos(\alpha)} - 2b\right)\cos(\alpha)$$

$$N = -2mg\,(1 - 2\cos(\alpha))$$

Condicion de despegue

$$N = 0$$

$$\therefore \quad \alpha_{despegue} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

c) Trabajo Realizado por el Roce

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$W_{roce} = \int_{y_i}^{y_f} F \quad dy$$

$$= \int_{y_i}^{y_f} -\mu N \, dy$$

$$= \int_0^{y_d} \mu \left(2mg \left(1 - 2\cos(\alpha) \right) dy \right.$$

tmb $\tan \alpha = \frac{y}{b}$ $/ \underline{d}$

$$\frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} = \frac{dy}{b}$$

$$dy = \frac{b \cdot d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$$

$$W_{roce} = \int_0^{y_d} \mu \left(2mg \left(1 - 2\cos(\alpha) \right) dy \right.$$

$$= 2mg\mu \left[\int_0^{y_d} - \int_0^{y_d} 2\cos(\alpha) \right]$$

$$= 2mg\mu \left(Yd - 2\int_0^{\alpha d} \frac{b}{\cos(\alpha)}\, d\alpha \right)$$ Cambio variable

$$\int_0^{\alpha d} \frac{1}{\cos(\alpha)}\, d\alpha = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

indicacion.

Remplazando se llega //

$\Rightarrow$ W_{roce} se calcula con esto y remplazar.

P2. **Movimiento Forzado**

El eje de una rueda de radio R se encuentra a una distancia $3l + R$ del origen del sistema, donde hay una pared. La rueda gira con velocidad angular constante Ω_0, manteniendo en movimiento un pistón a lo largo del eje horizontal a través de una barra de largo $l >> R$, tal como se muestra en la siguiente figura:

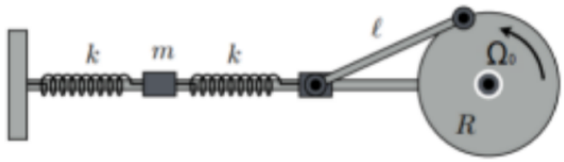


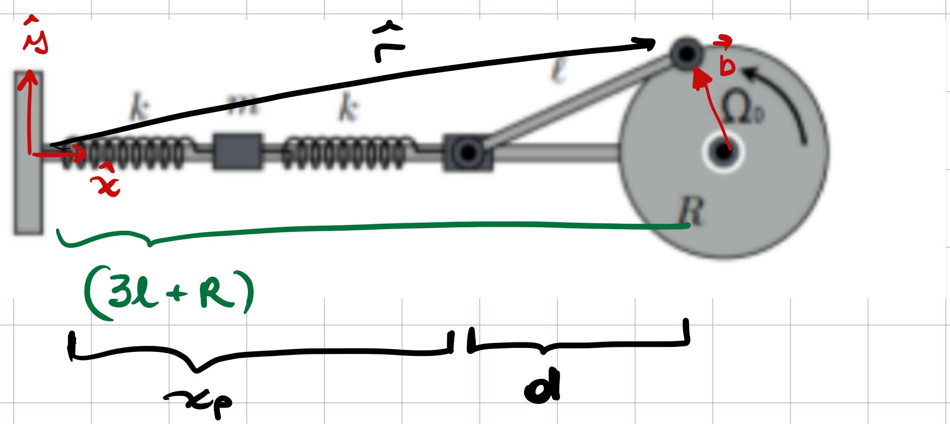
Figura 1: Pistones y resortes

El pistón se mantiene conectado a otro pistón de masa m, también confinado a la horizontal, mediante un resorte de constante elástica k y largo natural l. Otro resorte idéntico mantiene a la masa unida a la pared. En $t = 0$ el eje que une a la barra con la rueda se encuentra en la posición horizontal a una distancia $3l$ de la pared.

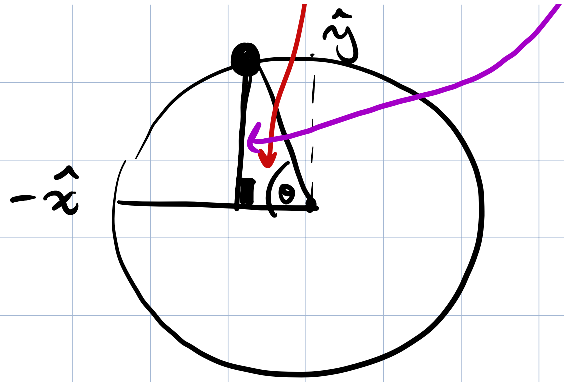
(a) Encuentre una expresión para la posición del pistón x_p en función del tiempo considerando que $l >> R$

(b) Deduzca la ecuación de movimiento para la masa m. Determine el valor de Ω_0 para que el sistema entre en resonancia.

(c) Si la partícula inicialmente está en la posición $x(0) = l$ y se le aplica una rapidez $\dot{x}(0) = \frac{\omega_0 R}{2}$ (ω_0 frecuencia natural del sistema), encuentre $x(t)$ para el caso de resonancia perfecta.



$$\vec{b} = -R\cos\theta\,\hat{x} + R\operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$



La rueda tiene velocidad angular Ω_0

$$\Omega_0 = \frac{\theta}{t}$$

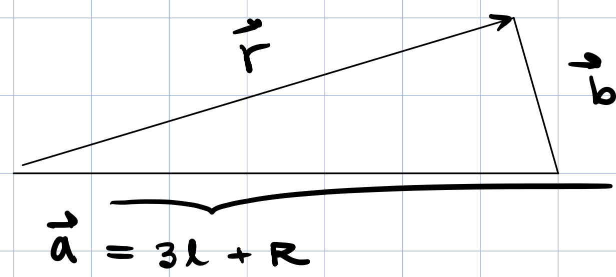
$$\theta = \Omega_0 t$$

Dado que θ no parte de 0 le agregamos una fase

$$\theta = \Omega_0 t + \delta$$

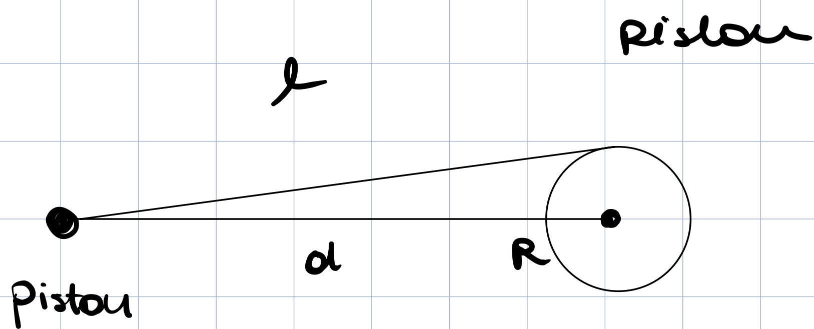
$$\therefore \vec{b} = -R\cos(\Omega_0 t + \delta)\hat{x} + R\,\mathrm{sen}(\Omega_0 t + \delta)\hat{y}$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$



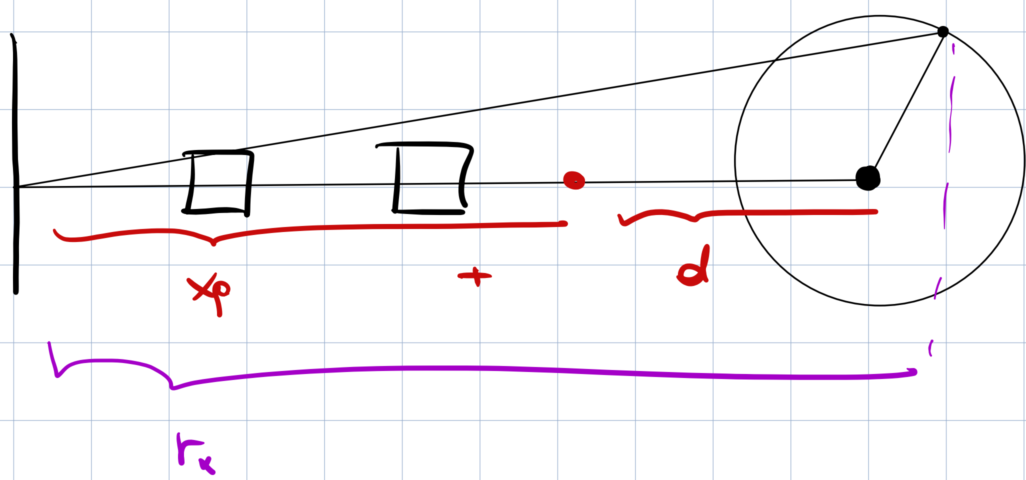
$$\vec{r} = (3l + R(1 - \cos(\Omega t + \delta)))\hat{x} + R \,\mathrm{sen}(\Omega t + \delta)\hat{y}$$

temos que $l \gg R$



$\Rightarrow l \simeq d$

Ademas temos :



$r_x \approx x_p + d \approx x_p + \ell$

Así

$r_x - \ell \approx x_p$

$\therefore\ x_p = 2\ell + R(1 - \cos(\Omega t + \delta))$

Por CI podemos obtener δ

$r_x = 3\ell$

$$\cancel{3l} = \cancel{3l} + R(1 - \cos(\cancel{\Omega_0 t} + \gamma))$$

$$1 = \cos(\gamma)$$

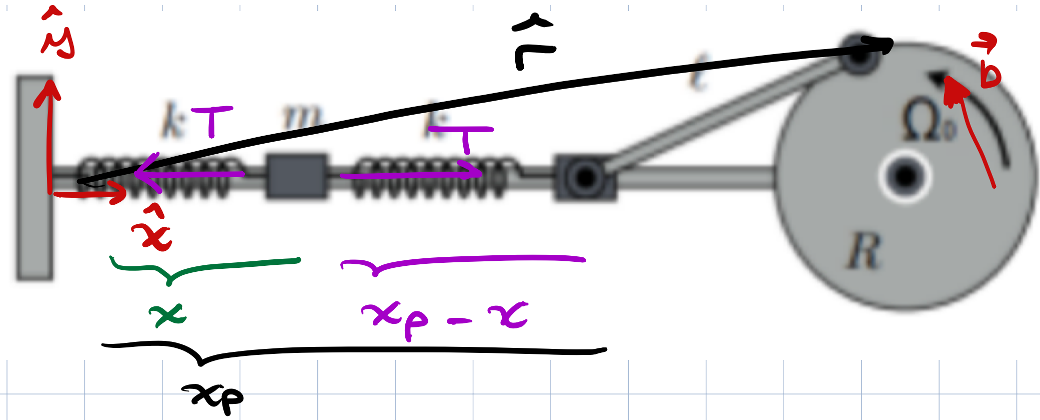
$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

Finalmente obtenemos que

$$x_p = 2l + R(1 - \cos(\Omega_0 t))$$

(b) Deduzca la ecuación de movimiento para la masa m. Determine el valor de Ω_0 para que el sistema entre en resonancia.

$$\sum F_x = m\ddot{x}$$



$$m\ddot{x} = -K(x-l) + K((x_p - x) - l)$$

$$\ddot{x} = -\frac{2K}{m}x + \frac{K}{m}x_p$$

Remplazando x_p

$$\ddot{x} = -\frac{2K}{m}x + \frac{K}{m}(2l + R(1-\cos(\Omega_0 t)))$$

Podemos apreciar:

una forma similar a:

- **Oscilaciones Forzadas:** Movimientos armónicos que se ven afectados por una fuerza externa que tiene amplitud F_o y frecuencia Ω. Estos poseen la siguiente ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m} x = \frac{k}{m}(2l+R) - \frac{k}{m} R\cos(\Omega_0 t)$$

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}\left(x - \frac{2l-R}{2}\right) = -\frac{k}{m} R\cos(\Omega_0 t)$$

si tomo

$$\mu = x - \frac{(2l+R)}{2}$$

$$\dot{\mu} = \dot{x}$$

$$\ddot{\mu} = \ddot{x}$$

$$\ddot{\mu} + \frac{2k}{m}\mu = -\frac{k}{m} R\cos(\Omega_0 t)$$

↳ Oscilador forzado

El sistema tendrá resonancia perfecta si $\Omega_0 = \omega_0$

$$\Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

(c) Si la partícula inicialmente está en la posición $x(0) = l$ y se le aplica una rapidez $\dot{x}(0) = \frac{\omega_0 R}{2}$ (ω_0 frecuencia natural del sistema), encuentre $x(t)$ para el caso de resonancia perfecta.

$x(0) = l \qquad \dot{x}(0) = \frac{\omega_0 R}{2}$

Solución Para resonancia Perfecta:

- **Resonancia perfecta:** Oscilaciones forzadas cuando se tiene que $\omega_0 = \Omega$
  No se puede ocupar la expresión anterior porque se indefine la fracción. Se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A_0 cos(\omega_0 t)$$

Cuya solución general tiene la forma:

$$\boxed{x(t) = Bcos(\omega_0 t + \delta) + \frac{A_0 t}{2\omega_0} sen(\omega_0 t)}$$

$$\mu(t) = B\cos(\omega_0 t + \gamma) + \frac{F_0 t}{2\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{2\ell + R}{2} + \mu(t)$$

usando Ci

$$F_0 = -\frac{KR}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{2K}{m}$$

falta encontrar B y γ

$\therefore \; x(0) = \ell$

$$\ell = \frac{2\ell + R}{2} + B\cos(\gamma)$$

$$B\cos(\gamma) = -\frac{R}{2}$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\omega_0 R}{2}$$

$$\dot{x}(t) = -B\,\omega_0 \,\text{sen}\,(\Omega_0 t + \gamma) + \frac{A_0}{2\omega_0}\left(\text{sen}\,(\cancel{\omega_0 t}) + \cancel{t\omega_0 \cos(\omega_0 t)}\right)$$

$$\dot{x}(0) = \frac{\cancel{\omega_0} R}{2} = -B\,\cancel{\omega_0}\,\text{sen}\,(\gamma)$$

$$-\frac{R}{2} = B\,\text{sen}\,(\gamma)$$

tenemos:

$$B\cos(\gamma) = -\frac{R}{2}$$

$$B\,\text{sen}\,(\gamma) = -\frac{R}{2}$$

$$\tan(\gamma) = 1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

Reemplazando

$$\beta = -\frac{R}{2\cos(\pi/4)} = -\frac{R}{\sqrt{2}}$$

Así:

$$x(t) = \frac{-R}{\sqrt{2}}\cos\left(\Omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{F_0 t}{2\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t) + \left(\frac{2L + R}{2}\right)$$

P3. Una partícula se mueve sujeta a la acción de una fuerza conservativa cuya función energía potencial es:

$$U(x) = U_0 \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) \qquad -\infty < x < \infty$$

(1)

donde U_0 y a son constantes positivas.

i) Grafique la función $U(x)$.

ii) Encuentre los puntos de equilibrio.

iii) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estables.

iv) Cuando inicialmente la partícula se encuentra en $x > 0$ y su energía mecánica es $5\ U_0$, encuentre los puntos de retorno.

i) Primero ver casos

si $x \to \infty$

$U(x) \to C x$

$\downarrow$

comportamiento lineal

si $x \to 0_+$

$U(x) \to C \cdot \frac{1}{x}$ → hiperbola si $x \to -\infty$

$$U(x) \to -c\,x$$

si $x \to 0_-$

$$U(x) \to -c\,\frac{1}{x}$$

Simetrica:

Hallamos el minimo

derivando e igualando a 0

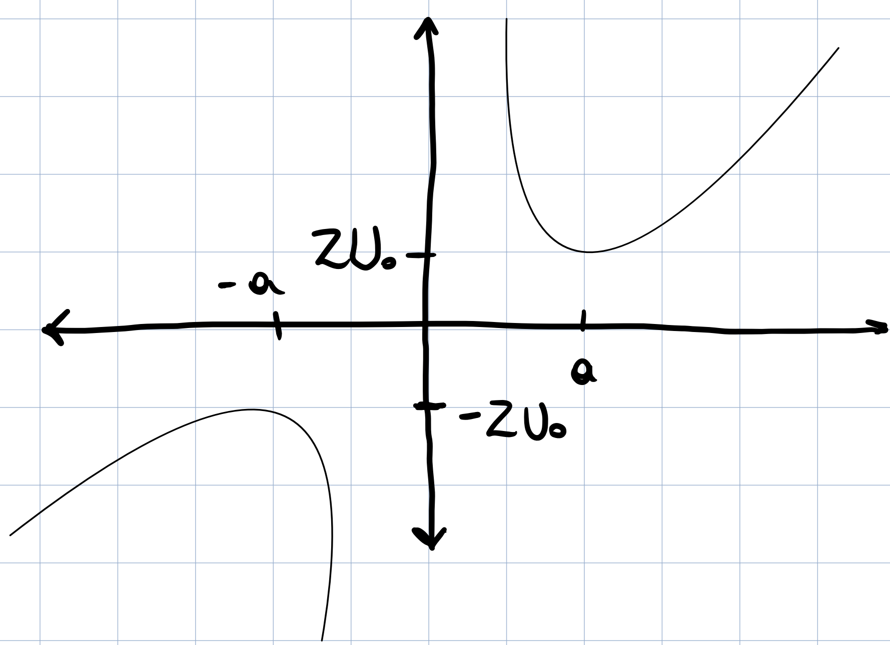
$$(U(x))' = 0 = U_0\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a}\right)$$

$\Rightarrow x = \pm a$

evaluando

$U(a) = 2U_0$

$U(-a) = -2U_0$



ii) Encuentre los puntos de equilibrio.

Pto de equilibrio

↳ $U'(x) = 0$

ya encontramos $x = \pm a$

Para ver estabilidad

$U''(x) > 0$ Estable

$U''(x) < 0$ Inestable

$$U'' = \left(U_0\left(-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a}\right)\right)'$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2\ \frac{1}{x^3}$$

$$U''_{(x)} = U_0\ \frac{2a}{(\ x^3)}$$

$$\therefore\quad U(-a) = -\frac{U_0 \cdot 2a}{a^3} = -\frac{2U_0}{a^2} < 0$$

$\Rightarrow$ Instable

$$U(0) = \frac{U_0\ 2a}{a^3} = \frac{2U_0}{a^2} > 0$$

$\Rightarrow$ Estable

iii) Encuentre la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los puntos de equilibrio estables.

$$w_{p.o} = \sqrt{\frac{U''(x)}{m}}$$

$$w_{po} = \sqrt{\frac{2U_0}{a^2 m}}$$

iv) Cuando inicialmente la partícula se encuentra en $x > 0$ y su energía mecánica es $5\,U_0$, encuentre los puntos de retorno.

$$U(x) = 5U_0 = U_0\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)$$

$$5xa = a^2 + x^2$$

$$0 = x^2 + 5ax + a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5a}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} a$$

Putos de Retorno