# Auxiliar 4

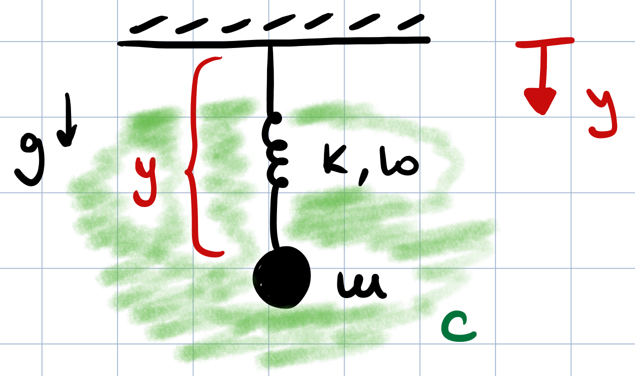
Dinámica en una Dimensión

**Profesor: Claudio Romero**
Auxiliares: Daryl Clerc y Daniel Lobos
Ayudantes: Felipe Pérez

## Pregunta 1: Movimiento Amortiguado

Una partícula de masa $m$ esta colgando desde un punto fijo mediante un resorte ideal de largo $l$ y constaste elástica $k$. La partícula esta en presencia de un liquido viscoso lineal de constante "c".

- **a)** Determine la ecuación de movimiento de la partícula $y(t)$ con respecto a su posición de equilibrio y encontrar la solución general sobre amortiguada.
- **b)** Si se tiene la condición inicial $y(0) = H > 0$ e $\dot{y}(0) = v_0$. Encuentre las constantes de la solución general. hint: La posición y se mide con respecto al punto de equilibrio
- **c)** Muestre las condiciones que debe cumplir $v_0$ para que la partícula pueda cruzar $y = 0$ en algún instante posterior al inicial.




Ecuacion de mov:

$$\ddot{y}m = mg - k(y - l_0) - c\dot{y}$$

- **Oscilaciones Amortiguadas:** Movimientos armónicos que presentan una fuerza de roce disipativa, por instancia, un roce viscoso ($c\dot{x}$). Estos poseen la siguiente ecuación de movimiento:

  $$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

  Si aplicamos las siguientes *definiciones*:

  $$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
  $$\beta = \frac{c}{2m}$$

  Podemos escribir la ecuación de movimiento de la siguiente forma:

  $$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y - g - \frac{k l_0}{m} = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}\left(y - \left(\frac{gm}{k} + l_0\right)\right) = 0$$

si $\beta = \frac{c}{2m}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\underbrace{\ddot{y}}_{\ddot{z}} + 2\beta \underbrace{\dot{y}}_{\dot{z}} + \omega_0^2 \left(\underbrace{y - \left(\frac{g}{\omega_0^2} + l_0\right)}_{z}\right) = 0$$

$$z = y - g/\omega_0^2 - l_0$$

$$\dot{z} = \dot{y} \longrightarrow \ddot{z} = \ddot{y}$$

dado que se busca la sol sobreamortiguada:

1. **Sobre-amortiguamiento**: Se tiene cuando $\beta^2 > \omega_0^2$.
   La solución general viene dada por:

$$\boxed{x(t) = e^{-\beta t}(Ae^{\Delta t} + Be^{-\Delta t})}$$

En donde $\Delta = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\therefore \quad y(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\Delta t} + Be^{-\Delta t}\right)$$

en donde $\beta = \dfrac{c}{2m}$ y $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\therefore \quad \Delta = \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \omega_0^2} \quad \text{conocidos} //$$

- **b)** Si se tiene la condición inicial $y(0) = H > 0$ e $\dot{y}(0) = v_0$. Encuentre las constantes de la solución general. hint: La posición y se mide con respecto al punto de equilibrio

$$y(0) = H > 0 \qquad \dot{y}(0) = v_0$$

$$y(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\Delta t} + \beta e^{-\Delta t}\right)$$

$$y(0) = e^{0}\left(Ae^{0} + \beta e^{0}\right) = H$$

- $A + \beta = H$

$$\dot{y}(t) = -\beta e^{-\beta t}\left(Ae^{\Delta t} + \beta e^{-\Delta t}\right) + e^{-\beta t}\left(\Delta A e^{\Delta t} - \Delta B e^{-\Delta t}\right)$$

$$y(0) = -\beta(A+\beta) + \Delta(A-\beta) = v_0$$

$$\cdot \quad -\beta(A+B) + \Delta(A-B) = v_0$$

Resolviendo el sistema:

$$A = \frac{v_0 + H(\beta+\Delta)}{2\Delta}$$

$$\beta = \frac{-v_0 - H(\beta-\Delta)}{2\Delta}$$

- **c)** Muestre las condiciones que debe cumplir $v_0$ para que la partícula pueda cruzar $y = 0$ en algún instante posterior al inicial.

$y(t) = 0 \rightarrow$ instante inicial

$$e^{-\beta t}\left(Ae^{\Delta t} + B^{-\Delta t}\right) = 0$$

$$Ae^{\Delta t} + \beta^{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A e^{2\Delta t} + \beta = 0$$

$$e^{2\Delta t} = -\frac{\beta}{A} \qquad / \ln$$

$$2\Delta t = \ln\left(-\frac{\beta}{A}\right)$$

$$t^* = \frac{1}{2\Delta} \ln\left(-\frac{\beta}{A}\right)$$

Primero que todo

$$t^* > 0$$ tiempo es positivo

$$\ln\left(-\frac{\beta}{A}\right) > 0$$

$$-\frac{\beta}{A} > 1$$

Como no sabemos el signo de A hay dos casos

$A > 0$

$\hookrightarrow \therefore \quad -\beta > A$

Reemplazando

$$-\left(\frac{-r_0 - H(\beta - \Delta)}{2\Delta}\right) > \frac{r_0 + H(\beta + \Delta)}{2\Delta}$$

$$H\beta - H\Delta > H\beta + H\Delta$$

$$\underbrace{-H\Delta}_{>0} > \underbrace{H\Delta}_{>0}$$

contradicción

Caso 2 : $A < 0$

Reemplazando :

$$-\left(\frac{-v_0 - H(\beta-\Delta)}{2\Delta}\right) < \frac{v_0 + H(\beta+\Delta)}{2\Delta}$$

$$\underbrace{-H\Delta < H\Delta}_{\text{es posible}}$$

$$\Delta < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_0 + H(\beta+\Delta)}{2\Delta} < 0$$

$$v_0 < -H(\beta+\Delta)$$

Se tiene cumplir que $V_0 < -H(\beta+\Delta)$ para que exista un tiempo $t^*$ donde $y(t^*) = 0$ //