FI1000 - Introducción a la Física Clásica, Otoño 2024

Profesores: W. Max-Moerbeck, P. Lira, C. Romero, A. Gallenne, I. Bordeu, V. González, M. Pires, A. Meza, C. Falcón, J. Mella.

Control 3 (pauta)

P1 Un bloque de masa m avanza con rapidez v_0 por una superficie horizontal. Entre el bloque y la superficie no hay roce, excepto por una zona de longitud desconocida donde hay roce con coeficiente cinético μ_c. Después de la zona con roce, se instala un sistema de frenado, compuesto por dos resortes de igual constante elástica k, pero distintos largos naturales ℓ_0 y $2\ell_0$, respectivamente.

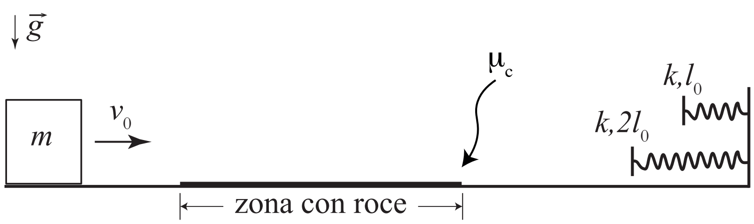


Figura 1

Al salir de la zona con roce el bloque ha perdido 3/4 de su energía cinética inicial, encuentre:

a) (2 puntos) La longitud de la zona con roce y el impulso total que esta entrega al bloque.

b) (2 puntos) La rapidez inicial máxima $v_{0,\max}$ que puede llevar el bloque para que solo se requiera de la acción de 1 resorte para detenerlo.

c) (2 puntos) La rapidez inicial máxima $v'_{0,\max}$ que puede llevar el bloque para que el sistema de frenado logre detenerlo. Compare el valor de la energía absorbida por el sistema de frenado y el valor de la rapidez máxima con los valor encontrados en (b).

SOLUCIÓN P1.

(a) La fuerza de roce realiza trabajo sobre la masa, por lo que la variación de energía cinética del bloque es

$$K_f - K_i = -\frac{3}{4}K_i = -\frac{3}{8}mv_0^2 = -\mu_c mgL.$$

De donde encontramos $L = \frac{3v_0^2}{8\mu_c g}$.

(1 PUNTO)

La energía cinética del bloque al salir de la zona con roce es

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{4}K_i = \frac{1}{8}mv_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2}v_0.$$

El impulso total entregado por el resorte corresponde al cambio de momentum lineal de la masa, es decir

$$\vec{I} = m(v_1 - v_0)\hat{\mathbf{i}} = -\frac{1}{2}mv_0.\hat{\mathbf{i}}.$$

con el eje x horizontal, apuntando hacia la derecha. Debido al roce con la superficie, el bloque pierde $3/4$ de su energía cinética pero solo la mitad de su momentum lineal.

(1 PUNTO)

(b) Durante la colisión entre la masa y el resorte no hay trabajo realizado por fuerzas no-conservativas, por lo que la energía mecánica del sistema se conserva.

La energía máxima que puede absorber el resorte de largo natural $2\ell_0$ sin que se comprima al segundo resorte es $U_1 = \frac{1}{2}k\ell_0^2$.

(1 PUNTO)

Igualando la energía de la masa al salir de la zona con roce, con la energía potencia U_1 y despejando la rapidez máxima $v_{0,\text{max}}$ obtenemos

$$\frac{1}{2}k\ell_0^2 = \frac{1}{8}mv_{0,\text{max}}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_{0,\text{max}} = 2\ell_0\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(1 PUNTO)

(c) La energía máxima que pueden absorber ambos resorte en conjunto es

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2}k(2\ell_0)^2 + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = \frac{5}{2}k\ell_0^2.$$

(1 PUNTO)

Igualando la energía de la masa al salir de la zona con roce, con la energía potencial máxima U_{max} y despejando la rapidez máxima $v'_{0,\text{max}}$ obtenemos

$$\frac{5}{2}k\ell_0^2 = \frac{1}{8}m{v'}_{0,\text{max}}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v'_{0,\text{max}} = 2\ell_0\sqrt{\frac{5k}{m}}.$$

Así, vemos que la energía máxima que puede absorber el sistema de frenado es cinco veces la energía máxima absorbida solo por el resorte de largo 2ℓ, $U_{\text{max}} = 5U_1$, mientras que la rapidez máxima permitida solo aumenta $\sqrt{5} \approx 2.2$ veces, es decir $v'_{0,\text{max}} = \sqrt{5}v_{0,\text{max}} \approx 2.2v_{0,\text{max}}$. Esto se debe a que la energía almacenada en los resortes aumenta linealmente con la deformación, pero la energía cinética aumenta de forma cuadrática con la rapidez.

(1 PUNTO)

P2 Un proyectil de masa m que avanza con rapidez inicial v_0 atraviesa una plancha de madera de masa $2m$ para después incrustarse en una segunda plancha de madera de masa $3m$, como muestra la figura 2.

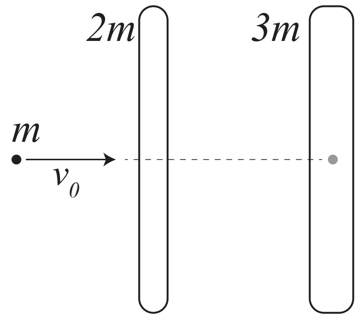


Figura 2

Las planchas están inicialmente en reposo, pero después de que la bala atraviesa la primera plancha y se incrusta en la segunda, se observa que ambas planchas se mueven con velocidades iguales.

a) (3 puntos) Encuentre la rapidez del proyectil después de pasar por la primera plancha (antes de chocar con la segunda). [Considere que las planchas y el proyectil no cambian sus masas durante las colisiones.]

b) (3 puntos) Calcule la energía cinética total del sistema en tres instantes de tiempo distintos: (i) antes de que el proyectil atraviese la primera plancha, (ii) cuando el proyectil viaja entre las dos planchas, (iii) después de que el proyectil se incrusta en la segunda plancha. Compare los valores y comente sobre el resultado.

SOLUCIÓN P2.

(a) No hay fuerzas externas netas actuando sobre el proyectil o las planchas, por lo que el sistema es cerrado con respecto al momentum.

Por la conservación de momentum en el eje x (horizontal, positivo hacia la derecha) durante la primera colisión

$$mv_0 = mv_0' + 2mv_f \quad \Longrightarrow \quad v_0 = v_0' + 2v_f,$$

donde v_0' y v_f son las rapideces del proyectil y de la plancha después de la colisión, respectivamente.

(1 PUNTO)

La colisión entre el proyectil y la segunda plancha es perfectamente inelástica, además, del enunciado, sabemos que la velocidad del conjunto proyectil+plancha debe ser igual a la velocidad de la primera plancha:

$$mv_0' = (m + 3m)v_f \quad \Longrightarrow \quad v_0' = 4v_f.$$

(1 PUNTO)

Combinando las expresiones anteriores, obtenemos que la rapidez del proyectil mientra viaja entre las planchas v_0' es

$$v_0' = \frac{2}{3}v_0.$$

(1 PUNTO)

(b) La energía cinética total del sistema en cada instante de tiempo es

$$K_i = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{2} m {v'}_0^2 + \frac{1}{2} 2m v_f^2 = \frac{1}{4} m v_0^2 = \frac{1}{2} K_i,$$

y

$$K_{ii} = \frac{1}{2}(m + 2m + 3m) v_f^2 = \frac{1}{12} m v_f^2 = \frac{1}{6} K_i = \frac{1}{3} K_{ii},$$

donde $v_f = v_0/6$ y $v'_0 = 2v_0/3$. **(1.5 PUNTOS)**

Notamos que la energía cinética total disminuye a la mitad durante la primera colisión y luego disminuye a un sexto del valor inicial durante la segunda colisión. Esto se debe a que las colisiones son inelásticas, no conservan energía cinética. La energía perdida, se disipa durante las colisiones, ya sea por la deformaciones sufridas por las planchas y el proyectil, por vibraciones mecánicas y por la liberación al medioambiente de la energía térmica generada por el roce entre el proyectil y las planchas.

(1.5 PUNTOS)

P3 La figura 3 muestra una varilla homogénea y delgada de largo L y masa m apoyada horizontalmente al borde de una plataforma. De la varilla cuelga una barra inhomogénea de masa M, cuyo centro de masa (CM) está a una distancia x de su extremo izquierdo (punto O).

En la posición de equilibrio del sistema, los extremos izquierdos de la varilla y de la barra quedan en contacto (punto O) y la varilla permanece en posición horizontal, como muestra la figura 3.

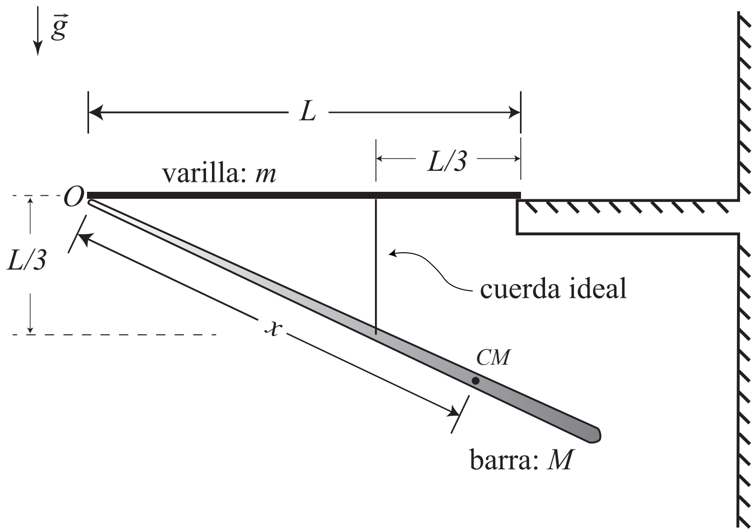


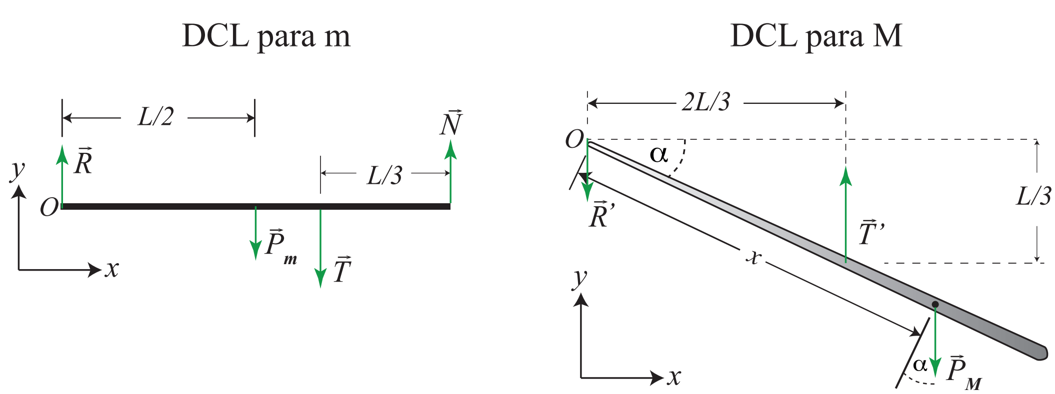
Figura 3

a) (3 punto) Dibuje los diagramas de cuerpo libre para ambos cuerpos y escriba las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y torques. [Para el cálculo de torques utilice O como eje.]

b) (3 punto) Encuentre una expresión para la posición del centro de masa de la barra, x.

SOLUCIÓN P3.

(a)



(1 PUNTO)

Considerando que la cuerda es ideal $T = T'$, y por tercera ley de Newton $R = R'$ (ambas en módulo). Luego, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas quedan:

$$R + N - mg - T = 0$$

para la varilla, y

$$-R - Mg + T = 0$$

para la barra.

(1 PUNTO)

Las ecuaciones de equilibrio de torques, considerando el punto O como el eje, quedan:

$$-\frac{1}{2}mgL + LN - \frac{2}{3}TL = 0$$

para la varilla, y

$$-Mgx\cos(\alpha) + \frac{2}{3}TL = 0$$

para la barra. Donde $\cos(\alpha) = 2/\sqrt{5}$.

(1 PUNTO)

(b) Sumando las ecuaciones de equilibrio de torque obtenemos

$$-\frac{1}{2}mgL + LN - \frac{2}{\sqrt{5}}Mgx = 0.$$

De las ecuaciones de equilibrio de fuerzas encontramos $N = (m + M)g$. Reemplazando este valor en la ecuacion anterior y despejando x, obtenemos la posicion del centro de masas de la barra, medida desde O:

(2 PUNTOS)

$$x = \frac{\sqrt{5}L(M + m/2)}{2M}.$$

(1 PUNTO)