Auxiliar 3

Cinemática 2D

Profesor: Ignacio Bordeu
Auxiliares: Fabián Corvalán, Maximiliano Rojas, Simón Yáñez
Ayudante: Josefina Livesey

P1. Lanzamiento de proyectil

Un proyectil se lanza desde el punto A en el suelo con rapidez v_0, con un ángulo inicial $\theta = 60°$ con respecto a la horizontal. A una distancia L del punto de lanzamiento, el suelo se eleva en pendiente constante con un ángulo $\alpha = 45°$ con respecto a la horizontal. El proyectil impacta sobre la pendiente en el punto B, tal como se muestra en la figura.

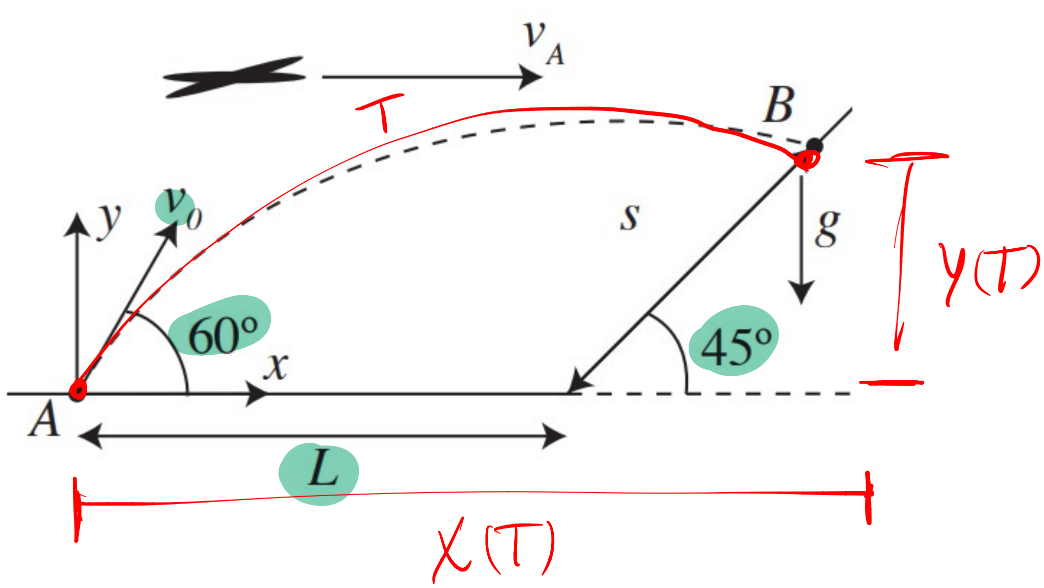
$v_a(t) = v_{0a} + a_a \cdot t = 2v_0 \hat{x}$

Durante el movimiento del proyectil, un avión surca el cielo con velocidad constante, horizontal, de magnitud $v_A = 2v_0$.

$\sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Rightarrow a_a = 0$ $\quad \Rightarrow$ solo afecta al eje $\hat{x}$

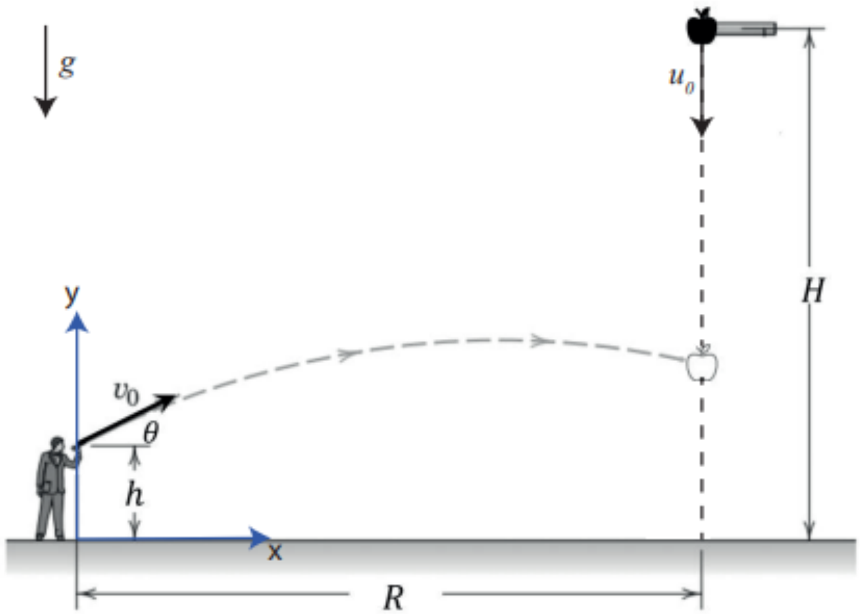
Nota: $cos(45°) = sen(45°) = \sqrt{2/2}$; $cos(60°) = 1/2$; $sen(60°) = \sqrt{3/2}$.

1. Determine el tiempo de vuelo entre los puntos A y B en función de g, v_0 y L.
2. Si el tiempo de vuelo entre los puntos A y B es T, determine la distancia s desde el inicio de la pendiente hasta el punto de aterrizaje B, en función de L, v_0 y T.
3. Determine el tiempo t^* desde que se lanza el proyectil hasta que su velocidad relativa al avión es $\vec{v} = \frac{(-6\hat{x}+\sqrt{3}\hat{y})v_0}{4}$, donde $\hat{x}$ es positivo hacia la derecha, e $\hat{y}$ hacia arriba.



P2. Lanzamiento de dardo

Como parte de un espectáculo de circo, una persona debe lanzar un dardo desde una altura h para clavarlo en una manzana que cae verticalmente desde una plataforma ubicada a una altura H del suelo y distancia R del lugar de lanzamiento del dardo. El dardo se lanza con una velocidad inicial v_0, formando un ángulo θ con la horizontal, como muestra la siguiente figura:



Le piden a usted diseñar un dispositivo que detecte el lanzamiento del dardo y, de forma inmediata, lance la manzana verticalmente hacia abajo con una rapidez inicial u_0, de forma que el dardo siempre la impacte. Considerando una aceleración de gravedad $\vec{g}$, hacia abajo, encuentre:

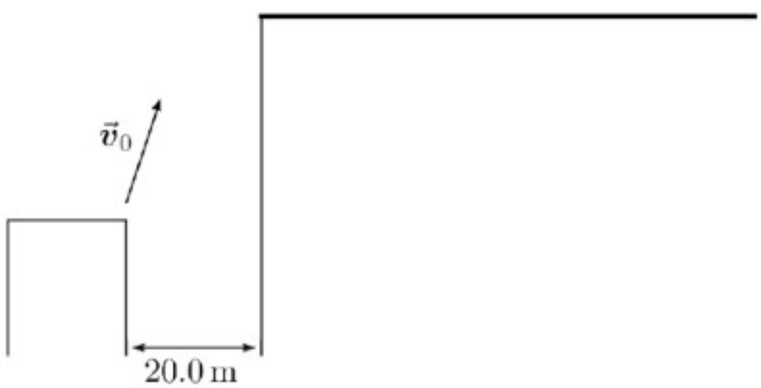
1. Las ecuaciones que describen la posición en función del tiempo para el dardo y para la manzana.
2. La(s) condición(es) que debe(n) cumplirse para que el dardo dé con la manzana.
3. El tiempo y posición donde debe ocurrir el impacto.
4. La rapidez u_0 que asegura el impacto.
5. Usando el resultado anterior, encuentre el valor de u_0 en el caso en que la velocidad inicial del proyectil [SIC] apunta directamente hacia la posición inicial de la manzana.

P3. (PROPUESTO) Lanzamiento de pelota

Alicia y Bob se encuentran en los techos de edificios adyacentes. El edificio de Alicia tiene una altura de 98 metros, mientras que el edificio de Bob tiene una altura de 125 metros. Los dos edificios se hallan separados por una distancia 20 metros. Alicia lanza una pelota con una rapidez de $40\frac{m}{s}$ con un ángulo de 60° sobre la horizontal y la suelta en el borde del edificio a una altura 100 metros desde el suelo (2 metros sobre el techo del edificio).

1. ¿Llegará la pelota al techo del edificio de Bob? Considere que este techo tiene un ancho de 60 m.

2. ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a la altura del techo del edificio de Bob?



Ecuaciones de movimiento

$\hat{x} \rightarrow$

Posición:

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{\text{Posición inicial}} + \underbrace{v_{0x}}_{\text{Velocidad inicial}} \cdot t + \frac{1}{2}\underbrace{a_x}_{\text{Aceleración en } x} t^2$$

Velocidad:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$\hat{y} \rightarrow$

Posición:

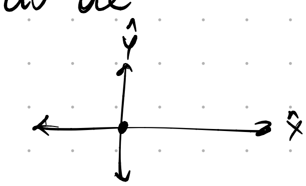
$$y(t) = \underbrace{y_0}_{\text{Posición inicial en } y} + \underbrace{v_{0y}}_{\text{Velocidad inicial } y} \cdot t + \frac{1}{2}\underbrace{a_y}_{\text{Aceleración en } x} t^2$$

Velocidad:

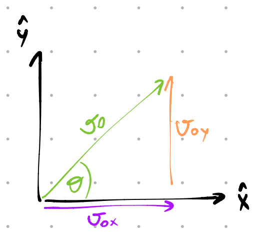
$$v_y(t) = v_{0y} + a_y \cdot t$$

Pasos a seguir para abordar un ejercicio de Cinemática:

1.- Determinar el sistema de referencia



2.- Descomponer los vectores que sean necesarios.



3.- Obtener las condiciones iniciales

$x_0 \quad v_{0x} \quad a_x$

$y_0 \quad v_{0y} \quad a_y$

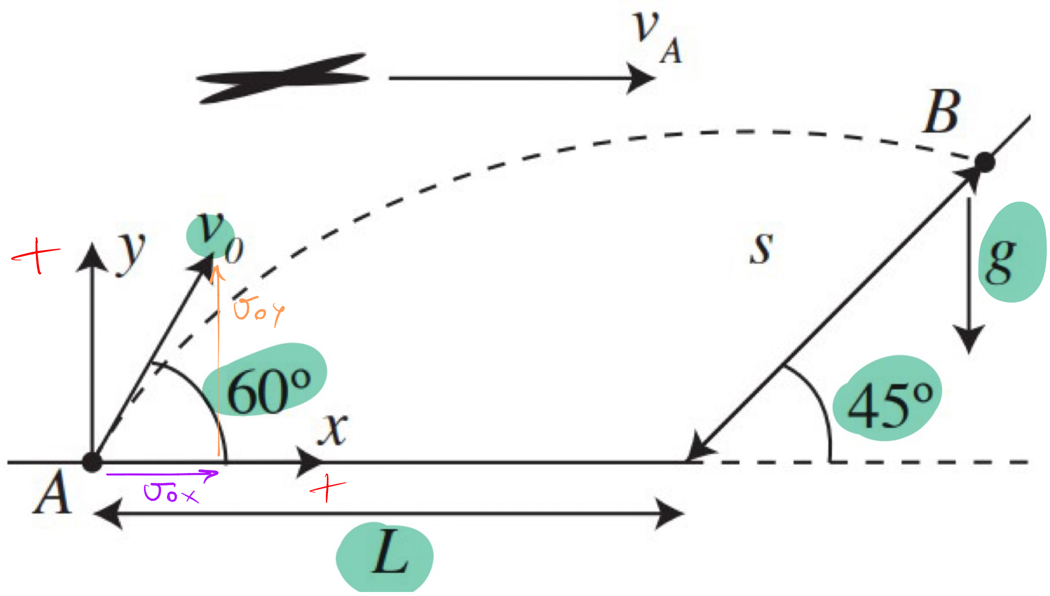
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{HIP} = \frac{v_{0y}}{v_0}$$

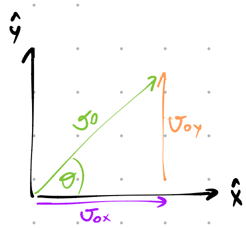
$$\Rightarrow v_{0y} = \operatorname{sen}\theta \cdot v_0$$

4.- Reemplazarlas en las ec. de movimiento.

5.- Despejar la incognita.

P1)





$\operatorname{sen}\theta = \frac{CO}{Hip} = \frac{v_{oy}}{v_0}$

$\Rightarrow v_{oy} = \operatorname{sen}\theta \cdot v_0$

$\cos\theta = \frac{CA}{Hip} = \frac{v_{ox}}{v_0}$

$\Rightarrow v_{ox} = \cos\theta \cdot v_0$

Cond. Iniciales

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$
$v_{ox} = v_0 \cos\theta = v_0 \cdot \frac{1}{2}$
$v_{oy} = v_0 \operatorname{sen}\theta = v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
$a_x = 0$
$a_y = -g$

$$x(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + v_{ox}\cdot t + \frac{1}{2}\cancel{a_x}^{\,0} t^2$$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{2}\cdot t}$$

Posición con respecto al tiempo en el eje x

$$v_x(t) = v_{ox} + \cancel{a_x}^{\,0} t$$

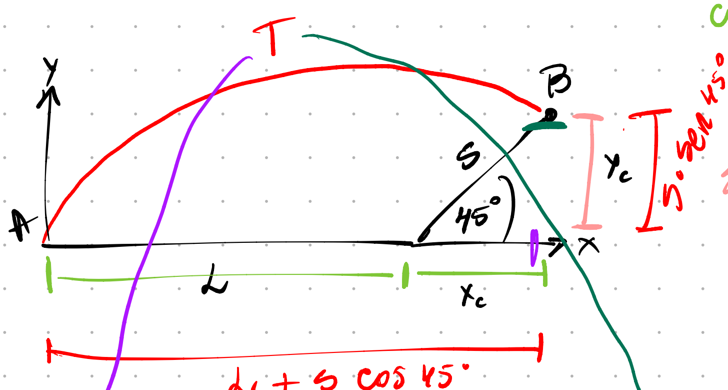
$$\boxed{v_x(t) = \frac{v_0}{2}}$$

$$y(t) = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{oy}\cdot t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\boxed{y(t) = v_0\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$v_y(t) = v_{oy} + a_y \cdot t$$

$$\boxed{v_y(t) = v_0\frac{\sqrt{3}}{2} - g t}$$



$\cos 45° = \frac{CA}{Hip} = \frac{x_c}{s}$

$x_c = \cos 45° \cdot s$

$\operatorname{sen} 45° = \frac{CO}{Hip} = \frac{y_c}{s}$

$y_c = \operatorname{sen} 45° \cdot s$

$$x(T) = L + \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

$$y(T) = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

$$x(T) = \frac{v_0}{2} \cdot T = L + \frac{s\sqrt{2}}{2} \quad (1) \qquad y(T) = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{s\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

De (1) vamos a despejar $\frac{s\sqrt{2}}{2}$ y vamos a reemplazar en (2)

$$\frac{s\sqrt{2}}{2} = \frac{v_0 T}{2} - L \quad \star\ \star$$

$$v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{v_0 \cdot T}{2} - L$$

$$-\frac{1}{2} g T^2 + \frac{v_0 \sqrt{3}}{2} T - \frac{v_0 \cdot T}{2} + L = 0 \quad / \cdot -1$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} g}_{A} T^2 + T \underbrace{\left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0 \sqrt{3}}{2} \right)}_{B} \underbrace{- L}_{C} = 0$$

$$T_{1,2} = \frac{-\left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0 \sqrt{3}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0 \sqrt{3}}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot (-L)}}{2 \cdot \frac{1}{2} g}$$

$\Rightarrow$ Nos quedamos con el Tiempo positivo :)

$$\boxed{T_+ = \frac{(\sqrt{3} - 1) v_0 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 v_0^2 + 8 g L}}{2g}}$$

(2)

$$\frac{s\sqrt{2}}{2} = \frac{v_0 T}{2} - L \quad \star\ \star$$

$$\Rightarrow s = \frac{\left(\frac{v_0}{2} T - L \right) \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{(v_0 \cdot T - 2L)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(v_0 T - 2L)}{\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2} = \frac{\sqrt{2}(v_0 T - 2L)}{2}$$

(3)

$$\vec{v}_p(t) = v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y}$$

$$\vec{v}_p(t) = \frac{v_0}{2}\,\hat{x} + \left(v_0\frac{\sqrt{3}}{2} - gt\right)\hat{y}$$

Velocidad relativa del del proyectil con respecto al avion es

$$\vec{v}_{p/A} = \vec{v}_p - \vec{v}_A = -\frac{6v_0}{4}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{4}v_0\,\hat{y}$$

$$\vec{v}_A = 2v_0\,\hat{x} + 0\,\hat{y}$$

se cumple para un tiempo t^*

$$\vec{v}_R = \frac{v_0}{2}\,\hat{x} + \left(v_0\frac{\sqrt{3}}{2} - gt\right)\hat{y} - 2v_0\,\hat{x} - 0\,\hat{y}$$

$$\vec{v}_R = \left(\frac{v_0}{2} - 2v_0\right)\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt\right)\hat{y}$$

$$\left(\frac{v_0}{2} - 2v_0\right)\hat{x} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt^*\right)}\hat{y} = -\frac{6v_0}{4}\,\hat{x} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}v_0}\,\hat{y}$$

$$\frac{\sqrt{3}\,v_0}{2} - gt^* = \frac{\sqrt{3}}{4}v_0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - \frac{\sqrt{3}}{4}v_0 = gt^*$$

$$\frac{2\sqrt{3}\,v_0 - \sqrt{3}\,v_0}{4} = gt^*$$

$$\frac{\sqrt{3}\,v_0}{4} = gt^*$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}\,v_0}{4g} = t^*}$$

P2)

Cond. Iniciales dardo

$x_0 = 0$

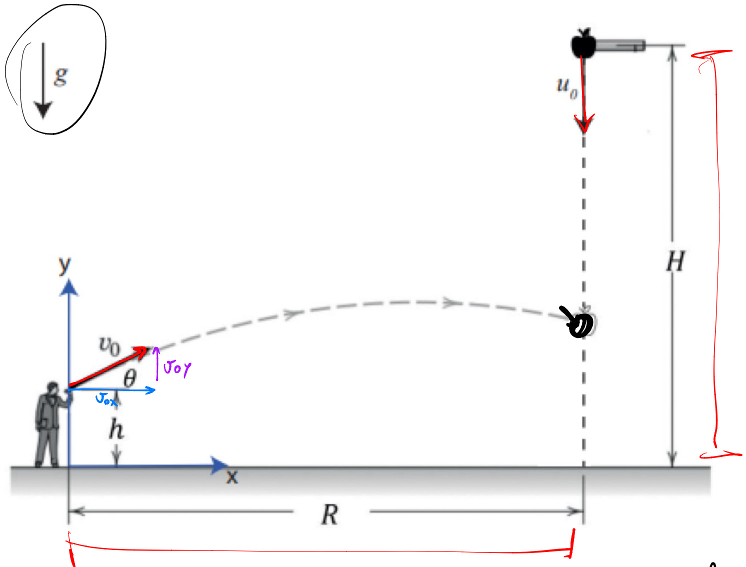
$y_0 = h$

$v_{0x} = \cos\theta \cdot v_0$

$v_{0y} = \text{sen}\,\theta \cdot v_0$

$a_x = 0$

$a_y = -g$



Cond. Iniciales manzana

$x_0 = R$

$y_0 = H$

$v_{0x} = 0$

$v_{0y} = -u_0$

$a_x = 0$

$a_y = -g$

dardo

$$x_d(t) = \overset{x_0}{\cancel{0}} + \overset{v_0 \cdot t}{\cos\theta \cdot v_0 \cdot t} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2}$$

$$\underline{x_d(t) = \cos\theta \cdot v_0 \cdot t}$$

$$\underline{y_d(t) = h + \text{sen}\,\theta \cdot v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

Manzana

$$\underline{x_m(t) = R}$$

$$\underline{y_m(t) = H - u_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}$$

b) "Tiempo que tardan en impactar"

$$\rightarrow x_d(t^*) = x_m(t^*) = x$$

$$y_d(t^*) = y_m(t^*)$$

c) $$x_d(t^*) = \boxed{\cos\theta \cdot v_0 \cdot t^* = R} = x_m(t^*)$$

$$y_d(t^*) = h + \text{sen}\,\theta \cdot v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = H - u_0 \cdot t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = y_m(t^*)$$

(b) Para que el dardo impacte la manzana, las posiciones deben ser iguales, para un tiempo dado $t = t_c$. Es decir:

$$x_m(t_c) = x_m(t_c) \quad \text{y} \quad y_m(t_c) = y_m(t_c) \tag{14}$$

(c) El impacto necesariamente debe ocurrir cuando el dardo cruza la trayectoria de la manzana:

$$\text{x:} \quad x_d(t_c) \equiv R = v_0 \cos(\theta) t_c \tag{15}$$

$$\text{y:} \quad y_d(t_c) = h + v_0 \sin(\theta) t_c - \frac{1}{2} g t_c^2, \tag{16}$$

De la ecuación para x, obtenemos el tiempo al cual debe ocurrir la colisión

$$t_c = \frac{R}{v_0 \cos(\theta)}, \tag{17}$$

y reemplazando en la ecuación para y, obtenemos la altura:

$$\text{y:} \quad y_d(t_c) = h + \tan(\theta) R - \frac{g R^2}{2(v_0 \cos(\theta))^2}. \tag{18}$$

Así, la colisión debe ocurrir en

$$x_c = R \tag{19}$$

$$y_c = h + \tan(\theta) R - \frac{g R^2}{2(v_0 \cos(\theta))^2}. \tag{20}$$

(d) Imponiendo que la manzana esté en la posición de impacto en el tiempo $t = t_c$, obtenemos

$$u_0 = \frac{v_0 \cos(\theta)}{R} \left(H - h - \tan(\theta) R\right) \tag{21}$$

(e) Si la velocidad inicial del dardo apunta directamente hacia la posición inicial de la manzana, se cumple que $\tan(\theta) R = H - h$, de forma que $u_0 = 0$.