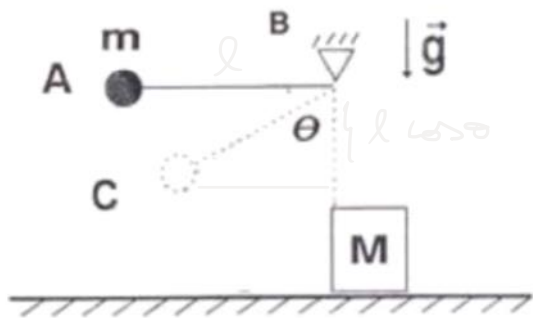


P1)



* Datos: m, M, l, g, θ

* Calculando la E_0 :

$$(E_0 = mgl)$$

* Luego del golpe la energía se conserva:

$$E_A = E_0 = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} M v^2 = mgl \quad / \cdot \frac{2}{M}$$

$$\Rightarrow v^2 = mgl(\cancel{1-1} + \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \left\{ v = \sqrt{\frac{2mgl \cos\theta}{M}} \right\}$$

D2)



Datos:
 - m, M
 - V_0
 - g

a) Determine la altura máxima alcanzada por el skater sobre la rampa.

* La energía inicial del sistema es:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

+ Una vez el skater sube en la rampa, la energía es la misma, pero su velocidad v_0 , dado que se da velocidad a la rampa por conservación energética.

* La energía en el punto máximo de altura se puede representar como:

$$E_1 = \underbrace{\frac{1}{2} (m+M) V_M^2}_{\text{EC del movimiento de la rampa}} + \underbrace{mgh_f}_{\text{EP del skater}}$$

* Por conservación de la energía:

$$E_0 = E_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (m+M) V_M^2 + mgh_f \quad (*)$$

* Para saber cuánto sube el skater, basta saber V_M .

Usamos conservación de momento

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f, \quad \vec{P}_i = m \vec{V}_0 = m v_0 \hat{x}$$

$$\vec{P}_f = (m+M) V_M \hat{x}$$

$$\Rightarrow m v_0 = (m+M) V_M$$

$$\Rightarrow V_M = \frac{m}{m+M} v_0$$

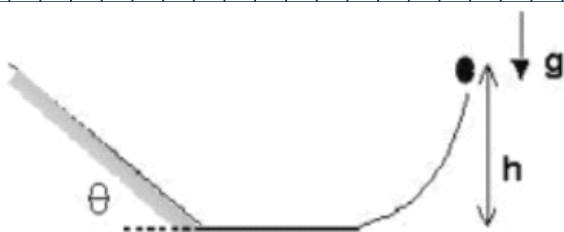
* Reemplazando en (*):

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (m+M) \left(\frac{m}{m+M} v_0 \right)^2 + mgh_f$$

$$\Rightarrow mgh_f = \frac{1}{2} \left(m v_0^2 - \frac{m^2}{m+M} v_0^2 \right)$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{m}{m+M} \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{M}{m+M} \right)$$

P3)



Datos:
 - h, g
 - μ_e, μ_d
 - m
 - θ

a) Calcule la altura máxima que puede alcanzar esta masa sobre el plano inclinado.

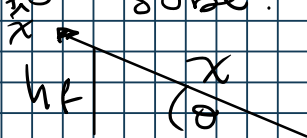
* Es importante saber primeramente la energía inicial.
 → Como está en reposo en t_0 , es puramente potencial.

$$\Rightarrow E_i = E_p + E_c = mgh$$

* Ahora, para saber cuánto del plano inclinado podrá subir, es necesario tomar en cuenta el trabajo realizado por el roce.

$$W_{Fr} = -\vec{F} \cdot \vec{x} = -\mu_d \cdot |\vec{N}| \cdot \hat{x} \cdot \vec{x}, \quad \text{con } \vec{x} = x \hat{x} \text{ dirección del movimiento}$$

* Nuestro incógnita es $|\vec{x}| = x$. Con x podemos saber cuánto sube:

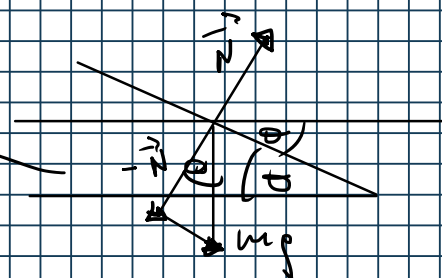


$$\Rightarrow h_F = \text{seno } \theta \cdot x$$

* Falta calcular $|\vec{N}|$:

$$\Rightarrow -\vec{N} = mg \cos \theta - \hat{y}$$

$$\Rightarrow |\vec{N}| = mg \cos \theta$$



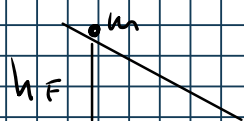
* Con este dato podemos seguir:

$$\Rightarrow W_{Fr} = -\mu_d \cdot mg \cos \theta \cdot x \cdot \hat{x} \cdot \hat{x}$$

* Por último es necesario considerar que:

$$W_{Fr} = E_F - E_i \rightarrow \text{Es decir, el trabajo es la diferencia de energía final e inicial}$$

* Calculando E_F :



$$\Rightarrow E_F = mgh_F = mgx \text{ seno } \theta$$

* Ahora si tenemos todo:

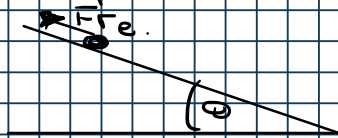
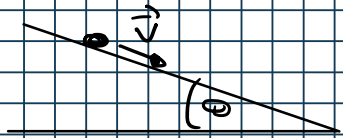
$$\Rightarrow \underbrace{-\mu_d \cdot mg \cos \theta \cdot x}_{(W_{Fr})} = \underbrace{mgx \text{ seno } \theta}_{(E_F)} - \underbrace{mgh}_{(E_i)} \Rightarrow x = \frac{h}{(\text{seno } \theta - \mu_d \cos \theta)}$$

y finalmente
$$h_F = x \cdot \text{seno } \theta = \frac{h}{(1 - \mu_d \cot \theta)}$$

b) ¿Cuál debe ser el valor mínimo del ángulo θ para que la pasa no se detenga en el plano inclinado?

* Una vez sube, m tiene 2 opciones.

1) O cae 2) O quede ahí por el roce estático.



→ Lo que sucede dependerá de θ y μ_e .

* Si θ es tal que le pase a m sucede 1)
* Si no, sucede 2).

* Para calcular este límite es necesario tomar en cuenta el caso límite de la fuerza de roce estático ($\vec{F}_{re}$).

* $|\vec{F}_{re}| \leq \mu_e |\vec{N}|$. Dependiendo de las fuerzas que se le apliquen a la masa.

* En el caso límite $|\vec{F}_{re}| = \mu_e |\vec{N}|$

* F_{re} depende de las fuerzas que se apliquen a m , y siempre es reactiva.

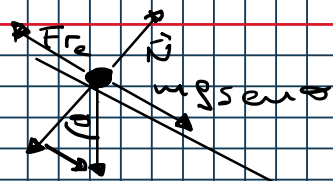
* En este caso reacciona al peso de m .

* Si las fuerzas que originan $\vec{F}_{re}$ son tales que:

$|\vec{F}| > \mu_e |\vec{N}|$, se rompe el caso límite y el sistema recurre a la opción 2).

Fin de la explicación

* Cálculo:



$$N = mg \cos \theta$$

Caso límite:

$$\Rightarrow F_{re} = \mu_e \cdot |\vec{N}| = \mu_e mg \cos \theta$$

El peso origina F_{re} :

$$\Rightarrow \underset{\text{(Peso)}}{mg \sin \theta} = \underset{\text{(F}_{re}\text{)}}{\mu_e mg \cos \theta} \Rightarrow \mu_e = \tan \theta$$

* Condición caso límite.

→ caso límite.

por lo que: $\theta_{lim} = \arctan(\mu_e)$

Si $\theta > \theta_{lim}$, opción 1) pasa

Si $\theta \leq \theta_{lim}$, opción 2) queda

c) Describa cualitativamente el movimiento de la masa en el caso del ángulo θ adecuado. ¿Se detendrá alguna vez o seguirá oscilando indefinidamente?

* Cualitativamente, no se detendrá por el trabajo del roce. $\{W_{Fr} = -\vec{F} \cdot \vec{x}\}$

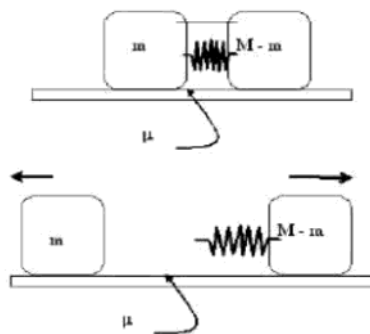
* El trabajo del roce le quita energía al Sistema: $W_{Fr} = E_f - E_i \Rightarrow \{W_{Fr} + E_i = E_f\}$ (*)

(*) refleja como $E_i + W_{Fr} = E_i - |W_{Fr}|$ decae a medida que pase el tiempo, dado que el trabajo del roce siempre es negativo.

Repercutiendo en que la E_f decae.

* Como es un modelo ficticio el tiempo en el que ocurre este proceso es infinito, dado que $E_f \rightarrow 0$, pero E_f nunca es cero, siempre cae de un hf mas bajo hf , y su velocidad es menor, pero nunca toca el cero. Así que para este modelo sigue indefinidamente.

* El roce estático no para la masa tampoco, dado que este solo depende de θ y μ_e , no de la energía total del sistema.



- (a) Utilizando la conservación del momentum y de la energía, calcule el valor de la velocidad V_0 del bloque de masa $(M-m)$, después que se cortó el hilo y ambas masas absorbieron la energía E_0 . Demuestre que esta velocidad V_0 se puede escribir como:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{M\lambda}} \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{M-m}{m}.$$

* La energía de movimiento es producida por la potencial del resorte:

$$E_0 = \underbrace{\frac{1}{2}(M-m)V_0^2}_{E_c \text{ del bloque con mov. } \rightarrow} + \underbrace{\frac{1}{2}mV_m^2}_{E_c \text{ del bloque con mov. } \leftarrow}$$

* Falta 1 ec. dado que tenemos 2 incógnitas: V_0 y V_m , usemos conservación del momentum:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \vec{p}_i = 0, \quad \vec{p}_f = -mV_m + (M-m)V_0$$

$$\Rightarrow mV_m = (M-m)V_0 \Rightarrow V_m = \lambda V_0$$

* Reemplazando en la ecuación para la energía:

$$E_0 = \frac{1}{2}m(\lambda V_0)^2 + \frac{1}{2}(M-m)V_0^2$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{V_0^2}{2} \{ m\lambda^2 + M-m \}$$

$$\Rightarrow 2E_0 = V_0^2 \{ \underbrace{m\lambda^2 + M-m}_{\text{A}} \}$$

$$\begin{aligned} \text{* Desarrollando A:} \quad \text{A} &= \frac{M^2 - 2Mm + m^2 + (M-m)m}{m} \\ &= \frac{M^2 - \cancel{Mm} + \cancel{m^2} + Mm - \cancel{m^2}}{m} \\ &= \frac{M}{m} \{ M - m \} = M\lambda \end{aligned}$$

* Por lo que:

$$2E_0 = V_0^2 M\lambda \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{M\lambda}}$$

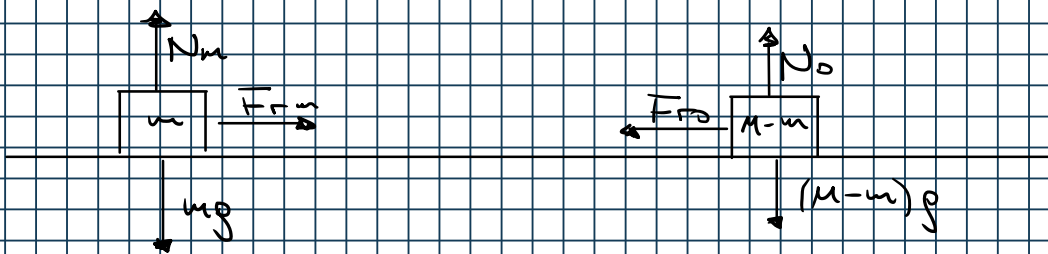
(b) ¿Por qué, en el punto anterior, el cálculo de la velocidad V_0 se realiza en el momento posterior al corte del hilo, cuando ya las masas absorbieron la energía E_0 y prácticamente no se han desplazado? Calcule el valor del momentum del centro de masa del sistema de partículas en ese instante (Recuerde que $P_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2$). Posteriormente, una vez que cada uno de los bloques se mueve en forma independiente, haga un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos.

* El cálculo de V_0 se hace en el momento que las masas absorben E_0 y aun no ha hecho trabajo el roce.

* El momentum del centro de masas en t_0 es:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{CM} &= -m V_m + (M-m) V_0 \\ &= -m \lambda V_0 + (M-m) V_0 \\ &= -\underline{\cancel{m} (M-m) V_0} + (M-m) V_0 = 0\end{aligned}$$

* Una vez se están desplazando los DCL son:



Tal que: Para m : $\left\{ \begin{array}{l} N_m = mg \\ F_{fm} = mg \mu \end{array} \right\}$ y $\left\{ \begin{array}{l} N_o = (M-m)g \\ F_{ro} = (M-m)g \mu \end{array} \right\}$

Para $M-m$: $\left\{ \begin{array}{l} N_o = (M-m)g \\ F_{ro} = (M-m)g \mu \end{array} \right\}$

(c) Calcule el momentum del centro de masa para un instante posterior $t > 0$. Muestre que puede expresarse como:

$$P_{CM} = -\mu M g \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} t.$$

Suponemos que $\lambda > 1$, para visualizar mejor el problema.

* Para $t > 0$, se debe tomar en cuenta como cambian las velocidades.

* Se tiene que: $V_1(t) = V_0 + a_1 t$
 $V_2(t) = V_m + a_2 t$

* Para V_1 : Del DCL se tiene que:

$$\begin{aligned}\cancel{*)} - F_{ro} &= (M-m) a_1 \Rightarrow -\cancel{(M-m)} \mu g = (\cancel{M-m}) a_1 \\ &\Rightarrow \left\{ a_1 = -\mu g \right\}\end{aligned}$$

* Para V_2 :

$$\cancel{*)} - F_{fm} = m a_2 \Rightarrow -m \mu g = m a_2 \Rightarrow \left\{ a_2 = -\mu g \right\}$$

$$\Rightarrow V_1(t) = V_0 - \mu g t \quad \text{y} \quad V_2(t) = V_m - \mu g t$$

* De a :

$$\left\{ V_1(t) = \sqrt{\frac{2 E_0}{m \lambda}} - \mu g t \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ V_2(t) = \sqrt{\frac{2 E_0 \lambda}{m}} - \mu g t \right\}$$

* Por lo que el momentum del centro de masas será:

$$\begin{aligned}\vec{P}_{CM} &= -m v_2(t) + (M-m) v_1(t) \\ &= -m \left\{ \sqrt{\frac{2E_0 \lambda}{M}} - \mu g t \right\} + (M-m) \left\{ \sqrt{\frac{2E_0}{M \lambda}} - \mu g t \right\}\end{aligned}$$

* Usando que: $\frac{m \sqrt{\lambda}}{\sqrt{m \lambda}} = \frac{m^2 (M-m)}{m} = \underline{m(M-m)}$

$$\text{y } \underline{(M-m) \cdot \sqrt{1/\lambda}} = \sqrt{(M-m)^2 \frac{m}{M-m}} = \underline{m(M-m)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{P}_{CM} &= -\sqrt{\frac{2E_0}{M}} (M-m) m + \mu g t m + \sqrt{\frac{2E_0}{M}} m(M-m) - (M-m) \mu g t \\ &= \mu g t (m - (M-m)) = \underline{\mu g t (2m - M)}\end{aligned}$$

* Finalmente calculando:

$$\underline{\frac{M \lambda - 1}{\lambda + 1}} = \frac{\frac{M}{\cancel{M}} \{ \cancel{M-m} - m \}}{\frac{M - \cancel{m} + m}{\cancel{M}}} = \frac{M \{ M - 2m \}}{M} = \underline{M - 2m}$$

* Se obtiene lo pedido:

$$\left\{ \vec{P}_{CM} = -\mu g t \left\{ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right\} \right\}$$

(d) ¿Cuál de los dos bloques se detiene primero? ¿En qué instante $t=t_1$ se detiene?

* Los bloques se detienen cuando $v_1(t_1) = 0$ o' $v_2(t_2) = 0$

$$\Rightarrow v_1(t_1) = \sqrt{\frac{2E_0}{M \lambda}} - \mu g t_1 = 0 \Rightarrow \left\{ t_1 = \frac{1}{\mu g} \sqrt{\frac{2E_0}{M \lambda}} \right\}$$

$$\text{Análogo para } v_2 : \left\{ t_2 = \frac{1}{\mu g} \sqrt{\frac{2E_0 \lambda}{M}} \right\}$$

$$\text{Si } M-m > m \Rightarrow \frac{M-m}{m} = \lambda > 1$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1 \Rightarrow \left\{ t_2 > t_1 \right\}$$

$$\text{y si } M-m < m \text{ Análogamente}$$

$$\left\{ t_2 < t_1 \right\}$$