

P1. Dos discos de radio a y $2a$ dispuestos paralelos entre sí, giran sobre un eje común. La distancia vertical que separa a los discos es L y la velocidad angular de ambos es ω . En un instante dado una partícula se desprende del borde del disco superior de radio a . Durante la caída la aceleración es constante e igual a la aceleración de gravedad g .

Figure 1: Entire Caption

(a) Calcule el tiempo en que la partícula tendrá la misma altura que el disco inferior.
 (b) Determine $\omega_{\min}$, velocidad angular mínima para que la partícula choque con el disco inferior.
 (c) Exprese la velocidad de la partícula una vez en el disco inferior si $\omega < \omega_{\min}$ y la partícula queda pegada donde cae.

a) La posición de la partícula en el eje vertical, una vez cae de el disco superior, se modela como caída libre:

$$L = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2L}{g}} = t$$

b) Para movimiento circular:
 Calculamos la velocidad de salida:
 * La componente radial por la velocidad será:
 $\vec{V}_r = v_r \hat{r}$, en este caso $v_r = 0$ dado que la partícula está fijo en el borde

¿? $\vec{V}_\theta = v_\theta \hat{\theta}$, $v_\theta = \frac{d}{dt} = \frac{2\pi a}{T}$, con $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$\Rightarrow v_\theta = \omega a$$

Una vez se eyectada, la partícula entre en caída libre, con velocidad inicial $v_0 = \omega a$, en dirección del cateto del largo d .
 L Sabemos que la partícula llega al nivel inferior en $t_f = \sqrt{\frac{2L}{g}}$, por lo que

* Se debe determinar una condición para ω tal que v_0 le permite quedarse en el intervalo $[0, d]$.

La posición en $\hat{x}$ por la partícula será:
 $x(t) = v_0 \cdot t = \omega a \cdot t$

+ Usando que $x(t_f) \leq d \rightarrow$ Condición
 $\Rightarrow \omega a \cdot t_f \leq d \Rightarrow \omega \leq \frac{d}{a t_f}$ (1)

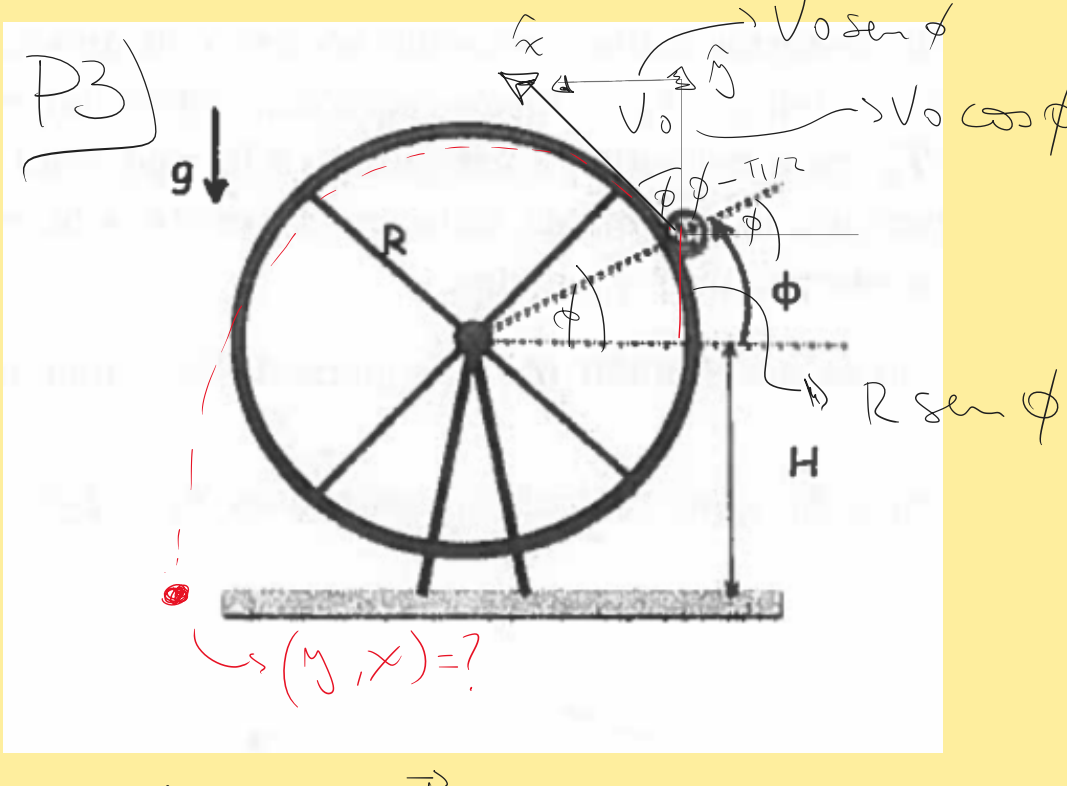
por lo que $\omega_{\max}$ que hace cumplir (1) es

$$\omega_{\max} = \frac{d}{a t_f} = \frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{g}{2L}}$$

c) Tenemos ω
 $\Rightarrow x(t_f) = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2L}{g}}$

por lo que $r^2 = a^2 + \frac{\omega^2 a^2 2L}{g}$
 $\Rightarrow r = a \left\{ 1 + \frac{2\omega^2 L}{g} \right\}^{1/2}$

Sabiendo esto es inmediato que

$$\vec{V} = \omega \cdot r \hat{\theta} = \omega a \left\{ 1 + \frac{2\omega^2 L}{g} \right\}^{1/2} \hat{\theta}$$


* Calculamos la $\vec{V}_0$.
 En movimiento circular: $\vec{V} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} = \omega \cdot R \hat{\theta}$

* Con esto, podemos calcular la proyección de v_0 en $\hat{x}$ y $\hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{V} = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} = v_0 \sin \phi \hat{x} + v_0 \cos \phi \hat{y} = \omega R \sin \phi \hat{x} + \omega R \cos \phi \hat{y}$$

* Con las velocidades en $\hat{x}$ y $\hat{y}$ podemos calcular las posiciones x y y

$$\hat{x} \Rightarrow x(t) = v_{0x} \cdot t = \omega R \sin \phi \cdot t$$

$$\hat{y} \Rightarrow y(t) = v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \omega R \cos \phi \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

* Es claro que $y(t_f) = -R \sin \phi - H$

Con esto calculamos el tiempo en el que cae:

$$y(t_f) = -R \sin \phi - H = \omega R \cos \phi t_f - \frac{gt_f^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{gt_f^2}{2} - \omega R \cos \phi t_f - (R \sin \phi + H) = 0$$

$$\Rightarrow t_f^2 - \frac{2\omega R \cos \phi}{g} t_f - \frac{2}{g} (R \sin \phi + H) = 0$$

$$\Rightarrow t_f = \frac{2\omega R \cos \phi}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2\omega R \cos \phi}{g} \right)^2 + \frac{2}{g} (R \sin \phi + H)}$$

$$= \frac{\omega R \cos \phi}{g} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4g}{(\omega R \cos \phi)^2} (R \sin \phi + H)} \right\}^{1/2}$$

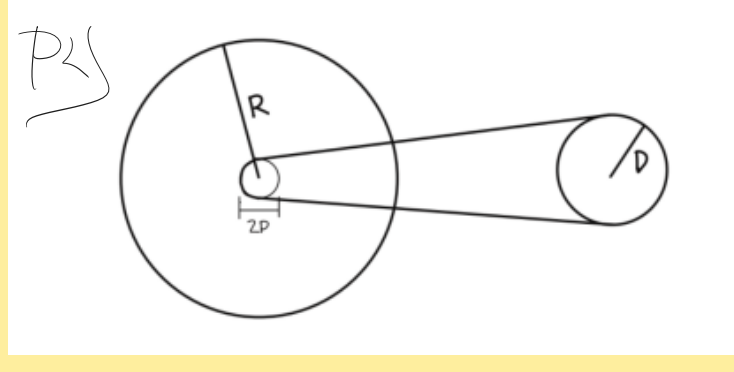
como $t_f > 0 \Rightarrow t_f$ es la única solución física.

* Finalmente para encontrar en qué x cae, calculamos $x(t_f)$:

$$x(t_f) = \omega R \sin \phi \cdot \frac{\omega R \cos \phi}{g} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4g}{(\omega R \cos \phi)^2} (R \sin \phi + H)} \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{\omega^2 R^2 \sin(2\phi)}{2g} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{8g}{\omega^2 R^2} \left(\frac{\sin \phi}{\sin 2\phi} \right)^2 (R \sin \phi + H)} \right\}^{1/2}$$

Usando la identidad $\sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi$

$$y(t_f) = -(R \sin \phi + H)$$


* El eje del piñón y la rueda tienen la misma ω : $\omega_p = \omega_r$

* Para que se mueva con velocidad V tenemos que por la rueda:

$$V = \frac{d}{dt} = \frac{2\pi R}{T} = \omega_p R$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{V}{R}$$

* El piñón por el pedal están conectados por la cadena, es decir recorren la misma distancia por unidad de tiempo (Velocidad) pero a una frecuencia (ω) distinta.

$$\Rightarrow \frac{d_{\text{piñón}}}{dt} = \frac{d_{\text{pedal}}}{dt} \Rightarrow \omega_p \cdot r_p = \omega_{\text{pedal}} \cdot r_{\text{pedal}}$$

tenemos que $\omega_p \cdot R = \omega_{\text{pedal}} \cdot D$
 y que $\omega_{\text{pedal}} \cdot D = V_{\text{pedal}}$

por lo que: $\omega_p \cdot R = V_{\text{pedal}}$

$$\Rightarrow \omega_{\text{pedal}} = \frac{\omega_p \cdot R}{D}$$

$$\omega_{\text{pedal}} = \frac{V \cdot R}{R \cdot D}$$