P1

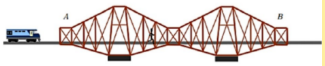


Figure 1: Mechón en apuros

a) * Si el mechón corre a A:

$V_m = \frac{L/3}{t_A}$ (1) → Ec para el mechón

$V_0 = \frac{x}{t_A}$ (2) → Ec para el tren.

↳ Ygualando t_A en (1) y (2):

$$t_A = \boxed{\frac{x}{V_0} = \frac{L}{3V_m}} \quad (3)$$

△ Hay 2 incógnitas: x, V_m

⇒ Nos falta otra ecuación

* Si el mechón corre a B:

$$V_m = \frac{2L/3}{t_B} \quad (4)$$

$$V_0 = \frac{x+L}{t_B} \quad (5)$$

↳ Ygualando t_B en (4) y (5):

$$t_B = \boxed{\frac{2L}{3V_m} = \frac{x+L}{V_0}} \quad (6)$$

* Ahora (3) y (6) son sisteme pere x y V_m:

↳ De (3): $\boxed{x = \frac{L V_0}{3 V_m}}$ (7)

↳ (7) en (6): $\frac{2L}{3V_m} = \frac{\left(\frac{L V_0}{3 V_m}\right) + L}{V_0}$

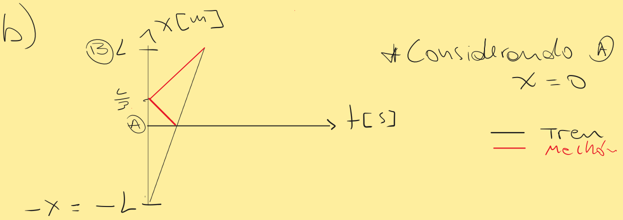
$\Rightarrow 2 L V_0 = \left(\frac{L V_0}{3 \cancel{V_m}} + L\right) 3 \cancel{V_m}$

$\Rightarrow 2 \cancel{L} V_0 = \cancel{L} V_0 + 3 \cancel{L} V_m \quad / : L$

$\Rightarrow 2 V_0 = V_0 + 3 V_m$

$\Rightarrow \boxed{\frac{V_0}{3} = V_m}$, Bonus: Reemplazando V_m en (7): $\boxed{x = \frac{L \cancel{V_0}}{\cancel{3} \frac{\cancel{V_0}}{\cancel{3}}} = L}$

b)



* Considerando Ⓐ como $x = 0$

P2)

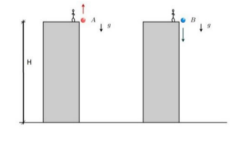


Figure 2: Lanzando pelotas

* La ecuación para la posición de A es:

$$y_A = H + V_A \cdot t - \frac{g t^2}{2} \quad (1)$$

* Para B:

$$y_B = H - V_B \cdot t - \frac{g t^2}{2} \quad (2)$$

* Se tiene como condición que ambos se encontrarán en el suelo.

$$\Rightarrow y_A(t_f) = y_B(t_f - \tau) = 0 \quad (\checkmark)$$

* y_B se evalua en $t_f - \tau$ dado que B es lanzada τ segundos más tarde.

↳ De (✓):

$$0 = \cancel{H} + V_A \cdot t_f - \frac{g t_f^2}{2} = \cancel{H} - V_B (t_f - \tau) - \frac{g (t_f - \tau)^2}{2}$$

* $+V_A$ $\uparrow V_A$, $-V_B$ $\downarrow V$

* Si pusieron $+V_B$ tampoco habría error y el resultado quedaría con signo −.

↳ Siguiendo con la resolución:

$$\Rightarrow V_A t_f - \frac{g t_f^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = -V_B t_f + V_B \tau - \frac{g t_f^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} + g t_f \tau - \frac{g \tau^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_A t_f + V_B t_f - g t_f \tau = V_B \tau - \frac{g \tau^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \frac{V_B \tau - g \tau^2 / 2}{V_A + V_B - g \tau}} \quad (3)$$

* Es útil en este momento otra ecuación para tf, de esta manera nos podemos deshacer de este término desconocido. Esto se logrará mediante (1):

$$(1): \quad -\frac{g t_f^2}{2} + V_A t + H = 0 \quad , \quad a = -g/2$$

$$b = V_A$$

$$c = H$$

$$\Rightarrow t_{f\pm} = \frac{-V_A \pm \sqrt{V_A^2 - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{g}{\cancel{2}} \cdot H}}{\cancel{2} \cdot \left(-\frac{g}{\cancel{2}}\right)}$$

$$\Rightarrow t_{f\pm} = \frac{-V_A \pm \sqrt{V_A^2 + 2gH}}{-g}$$

$$\Rightarrow t_{f\pm} = \frac{V_A \mp \sqrt{V_A^2 + 2gH}}{g}$$

* Como $\sqrt{V_A^2 + 2gH} > \sqrt{V_A^2} > V_A$

$\Rightarrow t_{f+} < 0$ y $t_{f-} > 0$

∴ Solo t_{f-} es solución física para el sistema.

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH}}{g}} \quad (4)$$

* Igualando ecuaciones para tf (3) y (4):

$$\frac{V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH}}{g} = \frac{V_B T - gT/2}{V_A + V_B - gT}$$

↳ Tenemos ec. lineal para V_B:

$$\Rightarrow (V_A + V_B - gT)\left(V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) = \left(V_B T - g T^2/2\right) g$$

$$\Rightarrow V_B\left(V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) + (V_A - gT)\left(\sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) = V_B T g - g^2 T^2/2$$

$$\Rightarrow V_B\left(V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH} - gT\right) = (gT - V_A)\left(\sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) - g^2 T^2/2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_B = \frac{(gT - V_A)\left(\sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) - g^2 T^2/2}{V_A + \sqrt{V_A^2 + 2gH} - gT}} \quad \checkmark$$

* T^*, para que $V_B = 0$?

$$V_B = 0 \Rightarrow (gT^* - V_A)\left(\sqrt{V_A^2 + 2gH}\right) - g^2 T^{*2}/2 = 0$$

↳ Es cuadrática para T^*:

$$\Rightarrow -\frac{g^2 T^{*2}}{2} + g T^* \Big(\underbrace{\sqrt{V_A^2 + 2gH}}_{\Delta}\Big) - V_A \sqrt{V_A^2 + 2gH} = 0$$

$$T^*_{\pm} = \frac{-g\sqrt{\Delta} \pm \sqrt{g^2 \Delta - \cancel{4}^{2}\left(-\frac{g^2}{\cancel{2}}\right)\left(-V_A\sqrt{\Delta}\right)}}{\cancel{2}\left(-g^2/\cancel{2}\right)}$$

$$T^*_{\pm} = \left(g\sqrt{\Delta} \mp \sqrt{g^2\Delta + 2g^2 V_A \sqrt{\Delta}}\right)/g^2$$

* Solo $T^*_- > 0 \Rightarrow \boxed{T^* = \left(g\sqrt{\Delta} + \sqrt{g^2\Delta + 2g^2 V_A \sqrt{\Delta}}\right)/g^2}$

P3)

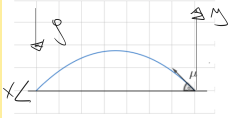


Figure 3: Lanzamiento parabólico

a) * La altura máxima se alcanza en $\alpha = \pi/2\ (90^\circ)$ y es un lanzamiento vertical $(x=0)$.

* La ecuación para y es:

$$\boxed{y = \mu t - g t^2}$$

* La condición para $y_{máx}$ es $V = 0$.

↳ se tiene para V que:

$$V = \mu - gt \Rightarrow V(t^*) = 0 = \mu - g t^*$$

$\therefore$ $t = t^*$ en el que se cumple $y_{máx}$ es:

$$\boxed{t^* = \mu/g}$$

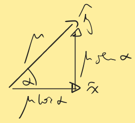
* Con esta información podemos escribir:

$$y(t^*) = y_{máx} = \mu t^* - g t^{*2}/2 = \mu(\mu/g) - \frac{g(\mu/g)^2}{2}$$

$$\Rightarrow y_{máx} = \mu^2/g - \mu^2/2g$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{máx} = \frac{\mu^2}{2g}}$$

b) α_m en que se encuentra $x_{máx}$:

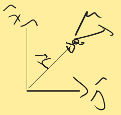


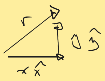
* El vector de velocidades como proyección en los ejes x e y se escribe

$$\boxed{\vec{\mu} = \mu\cos\alpha\,\hat{x} + \mu \operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}}$$

* Esto servirá para encontrar las ecuaciones itinerario para la posición, herramientas clave para encontrar $x_{máx}$.

↳ $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, $\vec{r}$ posición.





Para $\hat{x}$) $x = \mu\cos\alpha \cdot t$
Para $\hat{y}$) $y = \mu\operatorname{sen}\alpha\, t - gt^2/2$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \mu\cos\alpha \cdot t \\ y &= \mu\operatorname{sen}\alpha\, t - gt^2/2 \end{aligned}}$$

* Para encontrar $X_{máx}$, transformaremos $x(\alpha,t) \to x(\alpha)$ y de esta manera encontrar α_m.

↳ Esto lo lograremos encontrando $t(\alpha)$ aplicando al mismo tiempo condiciones del problema, tal de encontrar $t(\alpha_m) = t^{**}$

* La 1° condición para t^{**} es cuando $y = 0$, esto porque en $x_{máx}$ la partícula cae al suelo.

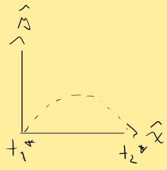
$$\Rightarrow y = 0 = \mu\operatorname{sen}(\alpha_m)t^* - \frac{gt^{*2}}{2}$$

$$\Rightarrow t^*\left(-\frac{gt^{*2}}{2} + \mu\operatorname{sen}\alpha_m\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{↳Inicio}}{t_1^* = 0} \text{ ó } t_2^* = \underset{\text{↳Fin}}{\frac{2\mu\operatorname{sen}\alpha_m}{g}}$$

* Es de notar que $t^* \neq t^{**}$ dado que solo se aplicó la condición $y = 0$, siendo t^* el tiempo en el que la partícula cae para cualquier x, no solo $x_{máx}$.

* Estas soluciones corresponden a los 2 tiempos en que $y = 0$, en este caso:



$$\boxed{t^* = t_2^* = \frac{2\mu\operatorname{sen}\alpha_m}{g}} \quad (1)$$

* Utilizando ① en la ecuación para $\hat{x}$) encontramos:

$\hat{x}$) $x(t^*) = \mu\cos\alpha \quad t^*$

$$x(t^*) = \mu\cos\alpha\left(\frac{2\mu\operatorname{sen}\alpha}{g}\right)$$

$$x(t^*) = \frac{\mu^2}{g}\, 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

* Usando que: $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$

$$\boxed{x(t^*) = \frac{\mu^2}{g}\operatorname{sen}(2\alpha)} \quad (V)$$

* Teniendo en cuenta que el $\operatorname{sen}(\alpha)$ es máximo en $\pi/2$, se tiene:

$$2\alpha_m = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha_m = \pi/4}$$

c) Para $D = x(t^*) < D_{máx}$ (V) tiene 2 soluciones, dado que $\operatorname{sen}(2\alpha)$ tiene 2 soluciones para valores no extremos.

d) La altura máxima $y_{máx}$ para cualquier ángulo se calcula teniendo en cuenta que esta se alcanza cuando $V_y = 0$

$$\Rightarrow V_y = \mu \operatorname{sen}\alpha - g t^* = 0 \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{\mu \operatorname{sen}\alpha}{g}}$$

$$\Rightarrow y_{máx} = \mu \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{g\left(\frac{\mu \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2}{2}$$

$$\therefore y_{máx} = -\frac{\mu^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g} + \frac{\mu^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g} = \boxed{\frac{\mu^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}}$$

* finalmente $y_{max} = x(t^*)$ es condición para α_c

$$\Rightarrow \frac{\mu^2 \operatorname{sen}^2\alpha_c}{2g} = \frac{\mu^2}{g} \operatorname{Sen}(2\alpha_c) = \frac{2\mu^2}{g} \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \Big/ \cdot \frac{g}{\mu^2 \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha_c}{2} = 2 \cos\alpha_c$$

$$\Rightarrow \tan\alpha_c = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha_c = \arctan(4)}$$

e) * Tenemos $x = \mu \cos\alpha t \Rightarrow \mu = \frac{x}{\cos\alpha t}$

* Además $y - \mu \operatorname{sen}\alpha t + g t^2/2 = 0$

$$\Rightarrow t_{\pm} = \frac{-\mu \operatorname{sen}\alpha \pm \sqrt{\mu^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 2gy}}{g}$$

$t_+ > 0$ ✓

$t_- < 0$ ×

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{x}{\cos\alpha\left[\frac{\sqrt{D} - \mu \operatorname{sen}\alpha}{g}\right]}}$$ ✓