Cosas Fluidos

Cambio De Coordenadas

Sean los vectors base x_i y ξ_i linealmente independientes. La transformación general de coordenadas entre las coordenadas estará dada por:

$$
\begin{gathered}
\xi = \xi(\mathbf{x}) \\
\xi^k = \xi^k(x^i) \\
\begin{pmatrix} d\xi^1 \\ \vdots \\ d\xi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi^1/\partial x^1 & \partial\xi^1/\partial x^k \\ \vdots & \\ & \vdots \\ \partial\xi^k/\partial x^1 & \partial\xi^i/\partial x^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^i \end{pmatrix} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \\
d\xi = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x}
\end{gathered}
$$

donde J es el Jacobiano local del cambio de coordenadas.
Utilizando la regla de la cadena para las derivadas parciales, podemos representar el gradiente como:

$$\nabla_x = J^T \cdot \nabla_\xi$$

Para sistemas cartesianos, debemos tener la formula usual para la distancia ds.

$$ds^2 = d\xi^T d\xi = (J \cdot d\mathbf{x})^T \cdot (J \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot G \cdot d\mathbf{x}$$

Donde

$$G = J^T \cdot J$$

Es el Tensor métrico

$$g_{ij} = \partial_i \xi^k \partial \xi^k_j$$

Se puede mostrar que:

$$g^{ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{imn} \epsilon^{jpq} g_{mp} g_{nq}$$

physics fluidos fluids

Tensores

Un tensor es algo que transforma como un tensor... xd
Definiciones:

- Un tensor de rango n tiene 3^n components.
- Un tensor de rango cero, es un escalar.

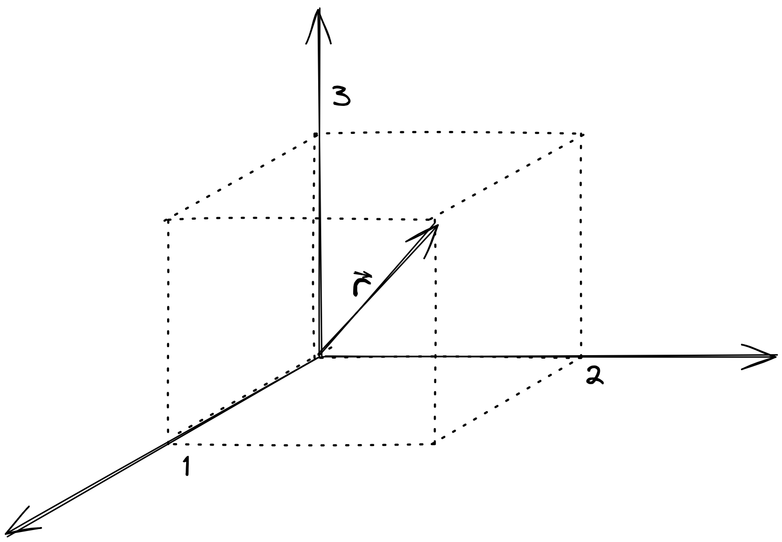
- Un tensor de rango uno, es un vector.
- Un tensor de rango 2, es un tensor.

Los vectores son cantidades que tienen dos características: Magnitud y dirección. Estos pueden set sumados y multiplicados para generar nuevos vectors.

- $$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$
- $$\mathbf{A}=a\mathbf{B}$$

Coordenadas Cartesianas

Las coordenadas cartesianas son fijas en el espacio y siguen la regla de la mano derecha.



El vector se puede describir por coordenadas como $\mathbf{r}=(r_1,r_2,r_3)$. La longitud de un vector en coordenadas cartesianas está dado por:

$$r^2=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r_1^2+r_2^2+r_3^2=r_\eta r_\eta$$

Usaremos la convención de Suma de Einstein.
La suma de Einstein es una convención para las components de un vector y como se suman estos, por ejemplo.

$$\eta_i=\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{r}=g_{ij}\eta^j=\sum_{j=1}^{3}g_{ij}\eta^j$$

$$\sum_{j=1}^{3}g_{ij}\eta^j=g_{i1}\eta^1+g_{i2}\eta^2+g_{i3}\eta^3$$

$$=g_{11}\eta^1+g_{12}\eta^2+g_{13}\eta^3+g_{21}\eta^1+g_{22}\eta^2+g_{23}\eta^3+g_{31}\eta^1+g_{32}\eta^2+g_{33}\eta^3$$

Un índice que aparece solo una vez en cada término de una ecuación se le conoce como

índice libre, por ejemplo, $x'_i = a_{im} x_m$
Cuando un índice se repite un índice se le conoce como índice mudo, como lo sería m.

Si queremos cambiar de índice entre dos ecuaciones, por ejemplo:

$$a_i = U_{im} b_m$$

y

$$b_i = V_{im} c_m$$

debemos cambiar el índice libre y el índice mudo a alguna otra letra, tal que

$$a_i = U_{im} V_{mn} c_n$$

El vector dividido por su longitud es el vector unitario:

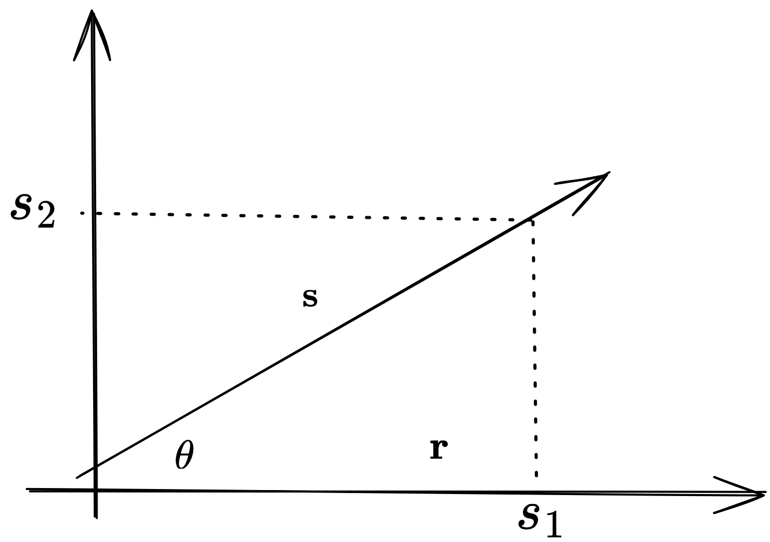
$$\hat{\mathbf{r}} = r^{-1} \mathbf{r}$$

Producto Escalar

El producto escalar de dos vectores se define como: Es la proyección de **s** en **r**.

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = r_\eta s_\mu = rs \cos\theta$$

El producto escalar se puede visualizar geométricamente como:



Vectores Base

Base Ortogonal

Los vectores unitarios e_i de las coordenadas cartesianas son ortogonales entre sí, es decir, $e_i e_j = \delta_{i,j}$. Donde δ_{ij} es la [Delta de Kronecker](#).
El vector posición puede ser escrito como [combinación lineal](#) de los vectores unitarios
$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}^i$

Base no Ortogonal

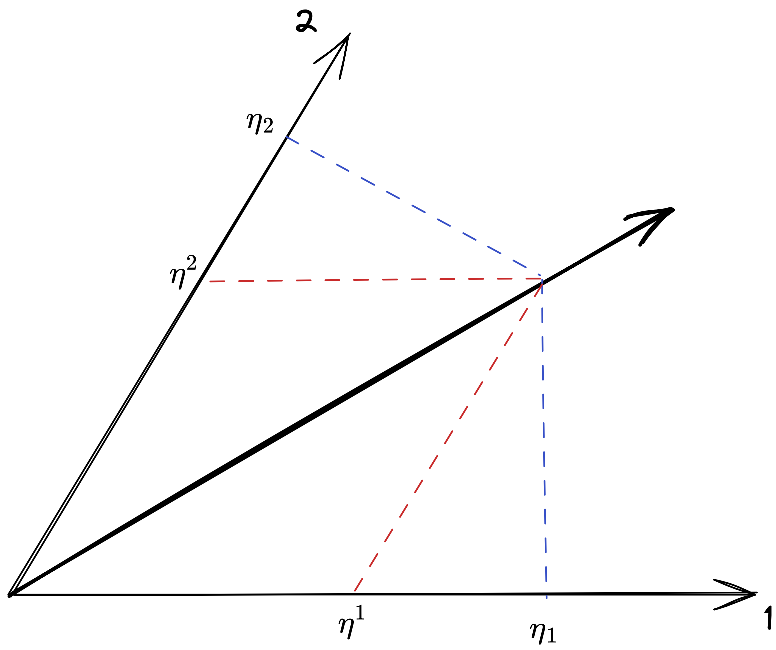
Si los vectores no forman un plano y son usados como vectores base, el vector $\mathbf{r}$ puede ser escrito como combinación lineal de estos:

$$\mathbf{r} = \eta^1\mathbf{a}^1 + \eta^2\mathbf{a}^2 + \eta^3\mathbf{a}^3$$

Los coeficientes pueden ser determinados como: [^2]

$$\eta_i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{r} = g_{ij}\eta^j$$

Los coeficientes η^i y η_i, son llamados como componentes contra-variante y co-variante respectivamente.



La componente η^1 es la intersección de la línea paralela al eje **2**
La componente η^2 es la intersección de la línea paralela al eje **1**

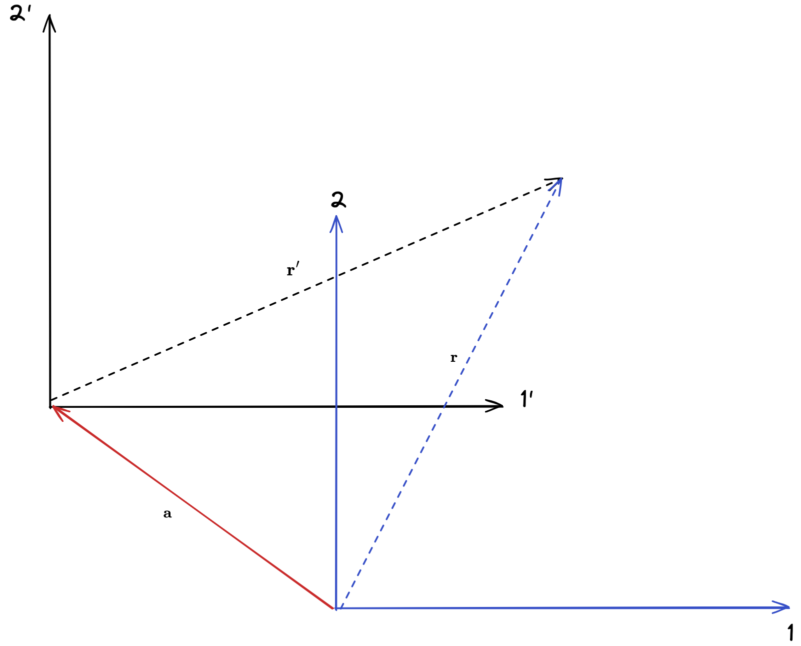
Las componentes η_{12} se encuentran en la intersección de las lineas punteadas perpendiculares a los ejes.

La matriz de coeficientes g_{ij} es conocido como Métrica del sistema coordenado. Cuando los vectores base son ortogonales, la métrica es la matriz unitaria.

Operaciones Con Vectores

Traslación

Cuando el sistema coordenado se mueve una distancia $\mathbf{a}$. Esta operación se llama traslación y se puede visualizar como:



La posición del vector $\mathbf{r}'$ respecto al sistema coordenado original es:

$$r'_\eta = r_\eta - a_\eta$$

Transformación Afín.

Una transformación afín es tal que las componentes del vector $\mathbf{r}'$ en el nuevo sistema coordenado es una combinación lineal.

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Los elementos de T_{ij} caracterizan la transformación afín.
En notación de Suma de Einstein queda como:

$$r'_\mu = T_{\mu\nu} r_\mu$$

Donde μ es el índice libre el cual puede tomar cualquier valor. El índice ν, es el índice de la suma por lo cual no puede ser igual a μ.
Cuando una cantidad $\mathbf{a}$ cartesiana transforma como:

$$r'_\mu = U_{\mu\nu} r_\nu$$

bajo rotaciones, este se conoce como vector. Esto quiere decir que las componentes están relacionadas por una transformación lineal.

Tensores Cartesianos

Un tensor de rango l, con $l = 0, 1, 2, \ldots$ cambia en un modo específico cuando el sistema se rota. Un tensor cartesiano de rango l es una cantidad con l índices A_{μ_l} donde las coordenadas cartesianas del sistema rotado están dadas por la operación de un operador de rotación.

La suma de dos Tensores 3 del mismo rango implica que las componentes de este son sumadas.
Cuando se multiplica un escalar a un tensor significa multiplicar cada uno de los elementos por este número.

$$\alpha(\mathbf{A})_{\eta_1,\ldots,\eta_l} = \alpha A_{\eta_1,\ldots,\eta_l}$$

Suma De Einstein

La suma de Einstein es una convención para las components de un vector y como se suman estos, por ejemplo.

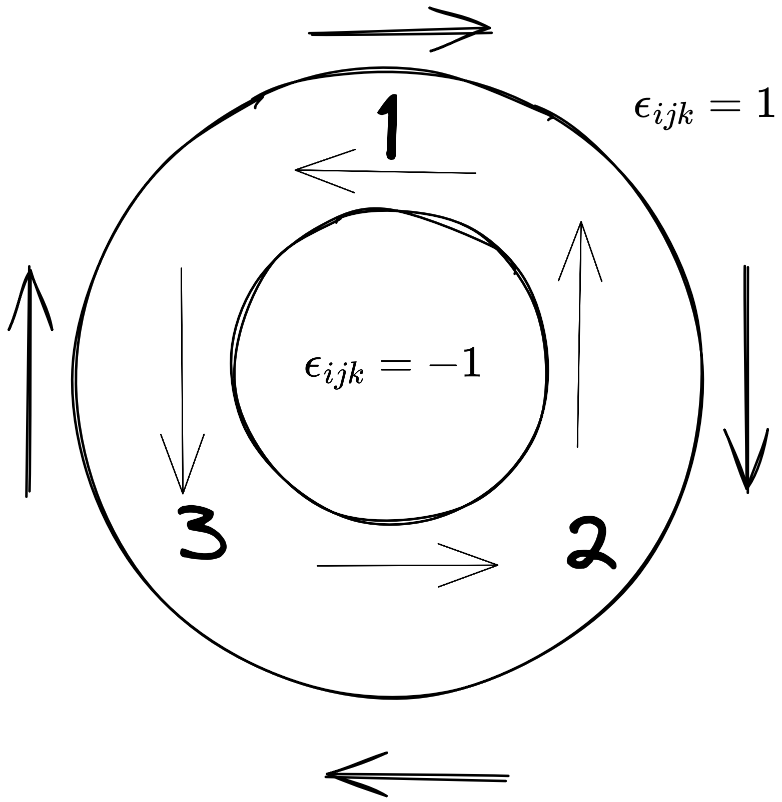
$$\eta_i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{r} = g_{ij}\eta^j = \sum_{j=1}^{3} g_{ij}\eta^j$$

$$\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\eta^j = g_{i1}\eta^1 + g_{i2}\eta^2 + g_{i3}\eta^3$$

$$= g_{11}\eta^1 + g_{12}\eta^2 + g_{13}\eta^3 + g_{21}\eta^1 + g_{22}\eta^2 + g_{23}\eta^3 + g_{31}\eta^1 + g_{32}\eta^2 + g_{33}\eta^3$$

Levi-Civita

El símbolo de New notes/Levi-Civita, también se conoce como símbolo de permutación.



Para un producto cruz por ejemplo tenemos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (e_i A_i) \times (e_j B_j) = \epsilon_{ijk} e_k A_i B_j$$

Donde el símbolo de Levi-Civita toma los valores $-1, 0, 1$ dependiendo de la permutación. Si la permutación es par, es decir, $1, 2, 3$ $\epsilon_{ijk} = 1$
Si es impar $\epsilon_{ijk} = -1$, es decir, $1, 3, 2$.
Y si un índice se repite, es cero. El símbolo de Levi-Civita es un tensor de rango 3 y tiene 27 componentes. Donde solo 6 son distintas de cero. Explícitamente el producto vectorial entre dos vectores en términos del símbolo de Levi-Civita será:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \epsilon_{ijk} e_k A_i B_j$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \epsilon_{ijk} e_k A_i B_j \\
&= \epsilon_{1jk} e_k A_1 B_j + \epsilon_{2jk} e_k A_2 B_j + \epsilon_{3jk} e_k A_3 B_j \\
&= \epsilon_{11k} e_k A_1 B_1 + \epsilon_{21k} e_k A_2 B_1 + \epsilon_{31k} e_k A_3 B_1 \\
&= \epsilon_{12k} e_k A_1 B_2 + \epsilon_{22k} e_k A_2 B_2 + \epsilon_{31k} e_k A_3 B_2 \\
&= \epsilon_{13k} e_k A_1 B_3 + \epsilon_{23k} e_k A_2 B_3 + \epsilon_{33k} e_k A_3 B_3 \\
&= \epsilon_{111} e_1 A_1 B_1 + \epsilon_{211} e_1 A_2 B_1 + \epsilon_{311} e_1 A_3 B_1 + \ldots \\
&+ \epsilon_{121} e_1 A_1 B_2 + \epsilon_{221} e_1 A_2 B_2 + \epsilon_{321} e_1 A_3 B_2 + \ldots \\
&+ \epsilon_{131} e_1 A_1 B_3 + \epsilon_{231} e_1 A_2 B_3 + \epsilon_{331} e_1 A_3 B_3 + \ldots \\
&+ \epsilon_{112} e_2 A_1 B_1 + \epsilon_{211} e_2 A_2 B_1 + \epsilon_{312} e_2 A_3 B_1 + \ldots \\
&+ \epsilon_{122} e_2 A_1 B_2 + \epsilon_{221} e_2 A_2 B_2 + \epsilon_{322} e_2 A_3 B_2 + \ldots \\
&+ \epsilon_{132} e_2 A_1 B_3 + \epsilon_{231} e_2 A_2 B_3 + \epsilon_{332} e_2 A_3 B_3 + \ldots \\
&+ \epsilon_{113} e_3 A_1 B_1 + \epsilon_{213} e_3 A_2 B_1 + \epsilon_{313} e_3 A_3 B_1 + \ldots \\
&+ \epsilon_{123} e_3 A_1 B_2 + \epsilon_{223} e_3 A_2 B_2 + \epsilon_{323} e_3 A_3 B_2 + \ldots \\
&+ \epsilon_{133} e_3 A_1 B_3 + \epsilon_{233} e_3 A_2 B_3 + \epsilon_{333} e_3 A_3 B_3
\end{aligned}$$

Cálculo Con Tensores

Algunas Expresiones En Notación De Índices

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(\nabla \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$$

$$[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})]_i = \delta_{jk} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right) = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$$

Ejemplo:

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})]_i - \nabla^2 v_i$$

Campos Vectoriales Y Gradiente De Una Función Vectorial.

Supongamos $\mathbf{v(r)}$ es una función vectorial, como el campo de velocidades.
Podemos definir el gradiente de v como es un campo tensorial de rango 2, el cual, operando sobre $d\mathbf{r}$ nos da $d\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{v(r)} = (\nabla\mathbf{v})d\mathbf{r}$. Entonces las componentes nos da:

$$(\nabla\mathbf{v})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla\mathbf{v})\mathbf{e}_j = \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e_i})}{\partial x_j} = \partial_j v_i$$

La cual es una matriz de $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$

Divergencia De Un Campo Vectorial Y Divergencia De Un Campo Tensorial

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla\mathbf{v})$$

La divergencia de un campo vectorial nos da un campo escalar, el cual corresponde a la traza del gradiente del campo.
En coordenadas cartesianas esto nos da:

$$\text{div } \mathbf{v} = \partial_i v_i$$

Si, en cambio, $\mathbf{v}$ es un campo tensorial, la divergencia es un campo vectorial tal que para cualquier vector $\mathbf{c}$

$$\text{div }(\mathbf{v}) \cdot c = \text{div }(\mathbf{v^T c}) - \text{tr}(\mathbf{v^T \nabla c})$$

Lo cual en coordenadas cartesianas queda como:

$$\text{div }(\mathbf{v}) \cdot c = \partial_j v_{ij}\mathbf{e}_i$$

Ejemplo

La expresión $C_{ij} = \partial_j v_i$ representa el gradiente de un vector $\mathbf{v}$, y el resultado es un tensor de segundo orden. Para demostrar que C_{ij} es un tensor, debemos probar que se transforma como un tensor bajo un cambio de coordenadas.

Consideremos un cambio de coordenadas de un sistema x_i a otro sistema x_i'. La transformación entre estos sistemas está dada por:

$x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3)$

La derivada parcial en el nuevo sistema se puede expresar en términos de las derivadas parciales en el sistema original utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Ahora, veamos cómo se transforma C_{ij} bajo este cambio de coordenadas:

$$C'_{ij} = \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j}$$

Utilizando la regla de la cadena, podemos escribir:

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial v'_i}{\partial x_k}$$

Sabemos que un vector se transforma como:

$$v'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} v_m$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior:

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_m} v_m\right)$$

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} v_m \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_m}$$

El segundo término se anula debido a la simetría de las derivadas de segundo orden y la antisimetría de $\frac{\partial x_k}{\partial x'_j}$ en k y j. Por lo tanto, nos queda:

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial v_m}{\partial x_k}$$

$$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_i}{\partial x_m} C_{mk}$$

Esta es precisamente la ley de transformación para un tensor de segundo orden. Por lo tanto, hemos demostrado que $C_{ij} = \partial_j v_i$ es un tensor de segundo orden.

Este tensor C_{ij} es conocido como el tensor gradiente de velocidad y juega un papel importante en la mecánica de fluidos, ya que está relacionado con la deformación y rotación de las partículas de fluido.

Fluidos.

Para describir el movimiento de un fluido, es importante definir el objeto de estudio. Como en [Mecánica Clásica] se estudia una partícula puntual, la cual es físicamente infinitamente más grande que un átomo, pero más pequeña que el sistema que la rodea. En fluidos haremos el mismo análisis, estudiaremos un punto del fluido, el cual será un volumen infinitesimalmente pequeño, respecto al volumen total del sistema, pero lo suficientemente grande para que el volumen esté compuesto de muchas moléculas del líquido.

Un fluido es un medio continuo que está caracterizado por su campo de velocidades, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, presión $p(\mathbf{x}, t)$ y densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$.

Descripción material vs Descripción Lagrangeana
La descripción Lagrangeana es descrita al especificar la posición de una partícula $\mathbf{x}_p$, como función del tiempo. En Mecánica de Fluidos esta descripción es complicada de implementar debido a que hay un número infinito de partículas en un volumen y cada una debería set etiquetada.
La descripción material utilize la posición de las partículas en un tiempo fijo t_0. Donde los campos son funciones de las posiciones y el tiempo.

Descripción Lagrangeana

Esta descripción es la que se utilize en Mecánica Clásica donde la trayectoria de una partícula está determinada por su posición inicial x_j^0 en un tiempo $\hat{t}$ dado.
La velocidad de la partícula estará descrita por las derivadas temporales de la posición $r_i = r_i(x_j^0, \hat{t})$, a una posición fija x_j^0. Y la aceleración como la derivada de esta.
En mecánica de fluidos, sin embargo esta descripción no es de mucha utilidad debido a que no podemos etiquetar a cada una de las partículas del fluido.

Descripción Material

En esta descripción todas las variables son funciones del tiempo y de las posiciones **locales**, en vez de las posiciones iniciales.
La posición local será dada por el vector posición $x_i = r_i$. Podemos hacer una transformación general de coordenadas del sistema (x_i, t) a $(x_j^0, \hat{t})$ como:

$$t = t(\hat{t}, x_j^0)$$
$$x_i = x_i(\hat{t}, x_j^0).$$

El cambio de coordenadas viene dado por una transformación de coordenadas de la forma, $d\xi = \mathrm{J} \cdot d\mathbf{x}$, donde J es el Jacobiano.

Derivadas

Derivada Temporal Parcial:

$\partial_t \phi$ indica el cambio en la variable ϕ con el tiempo observado desde una posición fija en el espacio.

Derivada Material Temporal:

$$\underbrace{\frac{D\phi}{Dt}}_{\text{Lagrangiana}} = \underbrace{\partial_t \phi}_{\text{Euler}} + \underbrace{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi}_{\text{Derivada direccional}}$$

Indica el cambio en la variable ϕ con el tiempo siguiendo al elemento de fluido.
El operador D_t puede actuar sobre escalares o vectores y las tasas de cambio son expresadas en términos de derivadas Eulerianas.
Por ejemplo: $n(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{Dn}{Dt} = \partial_t n + v_k \partial_k n$$

Líneas De Corriente:

Las líneas de corriente son líneas que son paralelas a los vectores velocidad en un instante de tiempo dado. Por ejemplo:

$$\epsilon_{ijk} v_j dx_k = 0$$

indica que el vector dx_k es paralelo a la velocidad v_j. Si expandimos esto como un determinante obtendremos para $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

Conservación De la Masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0.$$

Cuando el fluido es incompresible, la densidad es constante y la ecuación de conservación anterior se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Ecuaciones De Movimiento

La segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma'.$$

Donde σ' es el tensor de esfuerzos de Cauchy, el cual representa las fuerzas internas por unidad de área actuando en el fluido en el punto $\mathbf{x}$ en un tiempo t. $\mathbf{f}$ representa las fuerzas externas por unidad de volumen.

Fluidos Newtonianos

En la naturaleza existen dos tipos de fluidos, los fluidos que satisfacen la ley constitutiva de Newton y los que no.

La ley constitutiva relaciona el tensor de esfuerzos con el tensor tasa de deformación.
Diremos que un fluido incompresible es Newtoniano si es definido por la relación lineal entre el tensor de Cauchy y el tensor tasa de deformación.

$$\sigma' = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}.$$

Donde $\mathbf{e}$ es el tensor tasa de deformación.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T],$$
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

La presión es un campo escalar que aparece de la condición de incompresibilidad y debe ser determinado siempre para que un problema esté resuelto de forma completa.

Se puede escribir la relación constitutiva como

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}$$

Combinando esta relación, con la ecuación de movimiento y la conservación de la masa obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes.

Ecuaciones De Navier Stokes.

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k},$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

El término $\partial_t\mathbf{u}$ representa la aceleración de una partícula de fluido. Este término será cero cuando nos refiramos a flujos estacionarios. El término $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$, representa la aceleración de una partícula de fluido debido a variaciones espaciales de la velocidad. El término ∇p, es un gradiente de presión modificado, el cual incluye la presión hidrodinámica y la presión hidroestática. El término final $\mu\nabla^2\mathbf{u}$ representa las fuerzas viscosas por unidad de volumen actuando al interior del fluido y las cuales desaceleran el mismo.

Ecuación De la Vorticidad

Podemos derivar desde la ecuación de momentum una ecuación que gobierne la dinámica de la vorticidad.
Partamos de:

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j \partial_j v_i$$

usando la identidad:

$$\mathbf{u} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$$

$$v_j \partial_j v_i = \partial_i(\frac{1}{2} v_j v_j) + \epsilon_{ijk}\omega_j v_k$$

llegamos a

$$\partial_t \omega_i + v_j \partial_j \omega_i = \omega_j \partial_j v_i + \nu \partial_j \partial_j \omega_i$$

Esta ecuación no depende de la presión. La ecuación de vorticidad describe los efectos de las fuerzas viscosas, sin verse afectados por la gravedad ni la presión.

Si escribimos la ecuación de momentum como:

$$\nabla \cdot \tau = \eta \nabla^2 \mathbf{v} = -\eta \nabla \times \omega$$

Cuando la vorticidad no es cero, entonces existe un des-balance en el shear-stress.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)\right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$
$\partial_t[\rho(e + 1/2 v^i v_i)] + \partial_i[\rho v^i (e + 1/2 v^j v_j)] = -\partial_i q^i + \partial_i(T^{ij} v_j) + \rho v^i F_i\$$

El primer término del lado izquierdo de la ecuación es la tasa de incremento de energía por unidad de volumen. El segundo término es un término convectivo de energía por el flujo. En el lado derecho tenemos, el flujo de calor neto más el trabajo realizado por las fuerzas de superficies más el trabajo de las fuerzas de cuerpo.

Ecuación de Cauchy

$$\rho D_t v_i = \rho f_i + \partial_j \sigma_{ij}$$

Donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos definido por

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)\right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v}\left(e + \frac{1}{2}v^2\right)\right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$
$\partial_t[\rho(e + 1/2 v^i v_i)] + \partial_i[\rho v^i (e + 1/2 v^j v_j)] = -\partial_i q^i + \partial_i(T^{ij} v_j) + \rho v^i F_i\$$

El primer término del lado izquierdo de la ecuación es la tasa de incremento de energía por unidad de volumen. El segundo término es un término convectivo de energía por el flujo. En el lado derecho tenemos, el flujo de calor neto más el trabajo realizado por las fuerzas de superficies más el trabajo de las fuerzas de cuerpo.

Ecuación de Cauchy

$$\rho D_t v_i = \rho f_i + \partial_j \sigma_{ij}$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ es el tensor de esfuerzos definido por

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{ij}\hat{e}_j$$