FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

AUXILIAR N°5

Aplicaciones de la Biología a la Ingeniería y Ciencias

Modelamiento Matemático

PREGUNTA 1

Modelamiento Matemático

PI.

En la sabana africana, al sur del Sahara, viven tanto gacelas como leones. Los leones ocupan la cima de la cadena alimenticia, con una dieta que incluye gacelas, las cuales se alimentan de plantas. La dinámica poblacional de estos animales sigue el modelo de Lotka-Volterra.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra son las siguientes:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN - aNP \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = bNP - mP$$

Donde:
N: Número de presas (gacelas)
P: Número de depredadores (leones)
r: Tasa de crecimiento de las presas
a:Tasa de depredación
b:Tasa de conversión de presas consumidas en nuevos depredadores
m:Tasa de mortalidad de los depredadores

PI.

a) Explique los componentes de las ecuaciones de balance de masa para la población de presas y depredadores a partir del modelo de Lotka-Volterra.

PI.

a) Explique los componentes de las ecuaciones de balance de masa para la población de presas y depredadores a partir del modelo de Lotka-Volterra.

Inmigración

Nacimiento

Muerte

Población

Emigración

Sabana

Balance de Masa: $$\frac{\Delta X}{\Delta t} =$$

Entradas - Salidas + Generación - Consumo

Inmigración - Emigración + Nacimientos - Muertes

PI.

a) Explique los componentes de las ecuaciones de balance de masa para la población de presas y depredadores a partir del modelo de Lotka-Volterra.

Para la población de gacelas:

Consumo: Muerte de la presa **ocasionada** por el depredador

$$\frac{dN}{dt} = rN - aNP$$

Generación: Nacimiento de de presas

PI.

a) Explique los componentes de las ecuaciones de balance de masa para la población de presas y depredadores a partir del modelo de Lotka-Volterra.

Para la población de leones:

Consumo: Muerte natural del depredador

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = bNP - mP$$

Generación: Nacimiento de depredadores que **depende** del alimento (gacelas)

PI.

b) Explique cómo una disminución en la tasa de crecimiento de las presas (r) afectaría las poblaciones de presas y depredadores en el ecosistema.

PI.

b) Explique cómo una disminución en la tasa de crecimiento de las presas (r) afectaría las poblaciones de presas y depredadores en el ecosistema.

Menor tasa de crecimiento de las presas (r)

↓

Menor tasa de aumento de la población de presas.

↓

Menor disponibilidad de alimento para los depredadores

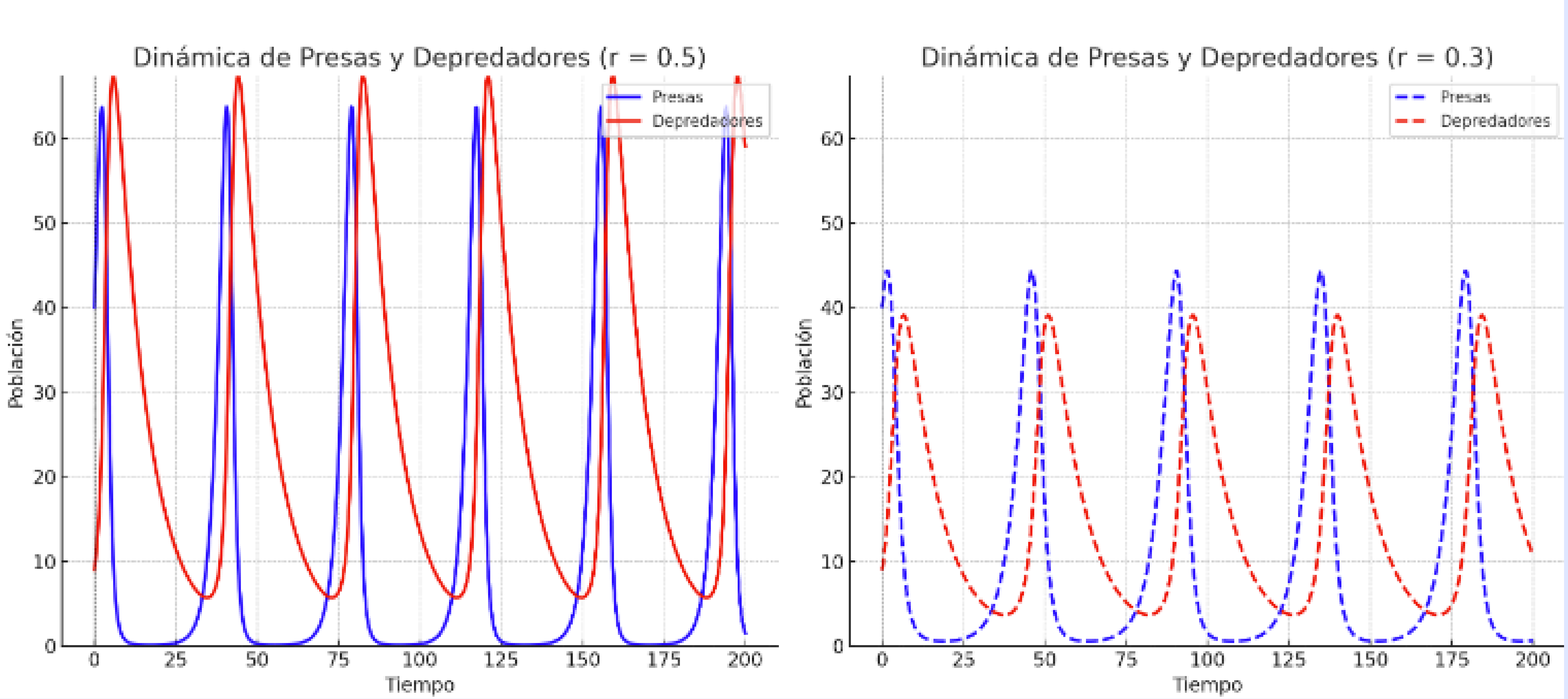
↓

Reducción de población de depredadores

Debido a una menor tasa de conversión de presas en nuevos depredadores (bNP) y una mayor mortalidad (mP).

P1.

b) Explique cómo una disminución en la tasa de crecimiento de las presas (r) afectaría las poblaciones de presas y depredadores en el ecosistema.



r: es la tasa de crecimiento de las presas

PI.

c) ¿Cómo podría el modelo de Lotka-Volterra cambiar si se introduce una tasa de inmigración constante de presas en el ecosistema?

PI.

c) ¿Cómo podría el modelo de Lotka-Volterra cambiar si se introduce una tasa de inmigración constante de presas en el ecosistema?

Si se introduce una tasa de inmigración, **se añade una entrada** al balance de las presas

$$\frac{dN}{dt} = rN - aNP + I \qquad \frac{dP}{dt} = bNP - mP$$

Al haber una entrada de presas, **aumenta la población de gacelas**, por lo que habrá **más alimento** disponible **para los depredadores**, ocasionando que **aumente su población** también.

PREGUNTA 2

Capacidad de Carga

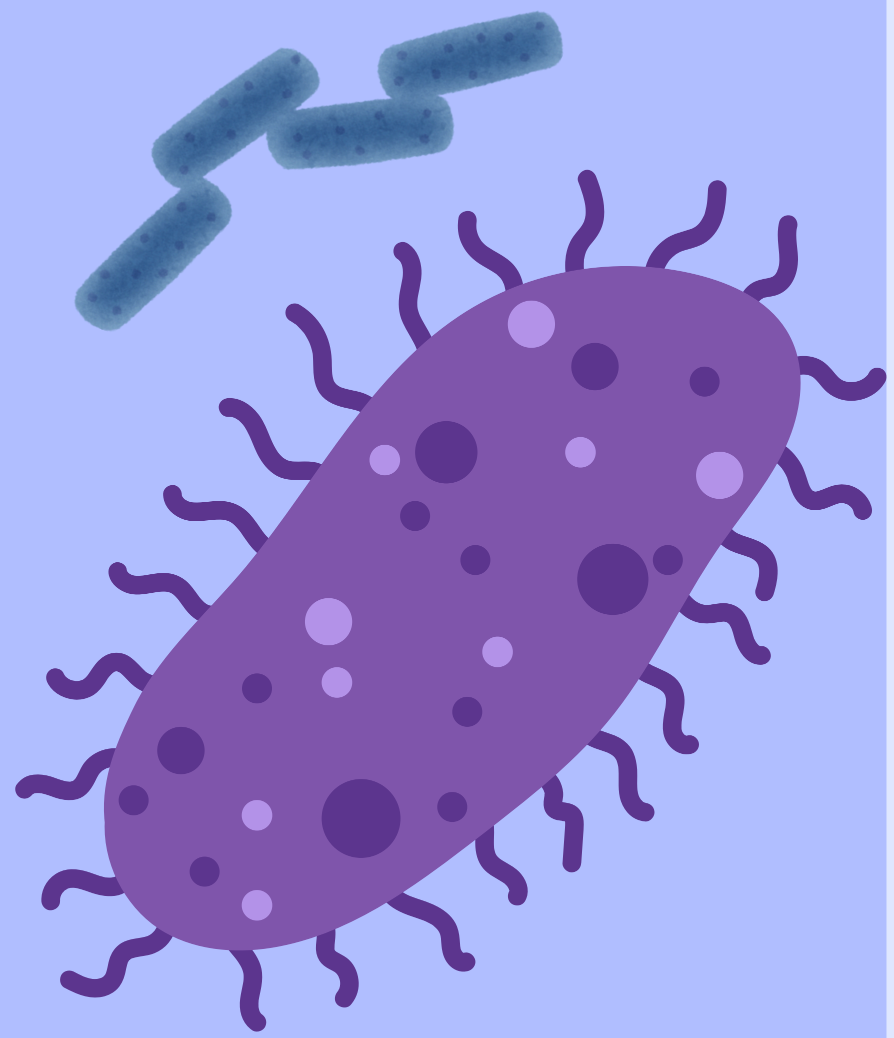
P2.

En un laboratorio de microbiología se está estudiando el efecto de la **capacidad de carga** en el crecimiento de una población bacteriana. Los experimentos muestran que la capacidad de carga (k) del sistema es de 10^9 bacterias. Inicialmente, la población de bacterias (X) es de 10^6 bacterias y la tasa de crecimiento (g) es de 0.1 por hora. Si se modela el crecimiento de la población bacteriana en el tiempo:

a) ¿Cómo debería verse un gráfico al inicio del experimento cuando los nutrientes disponibles son abundantes?

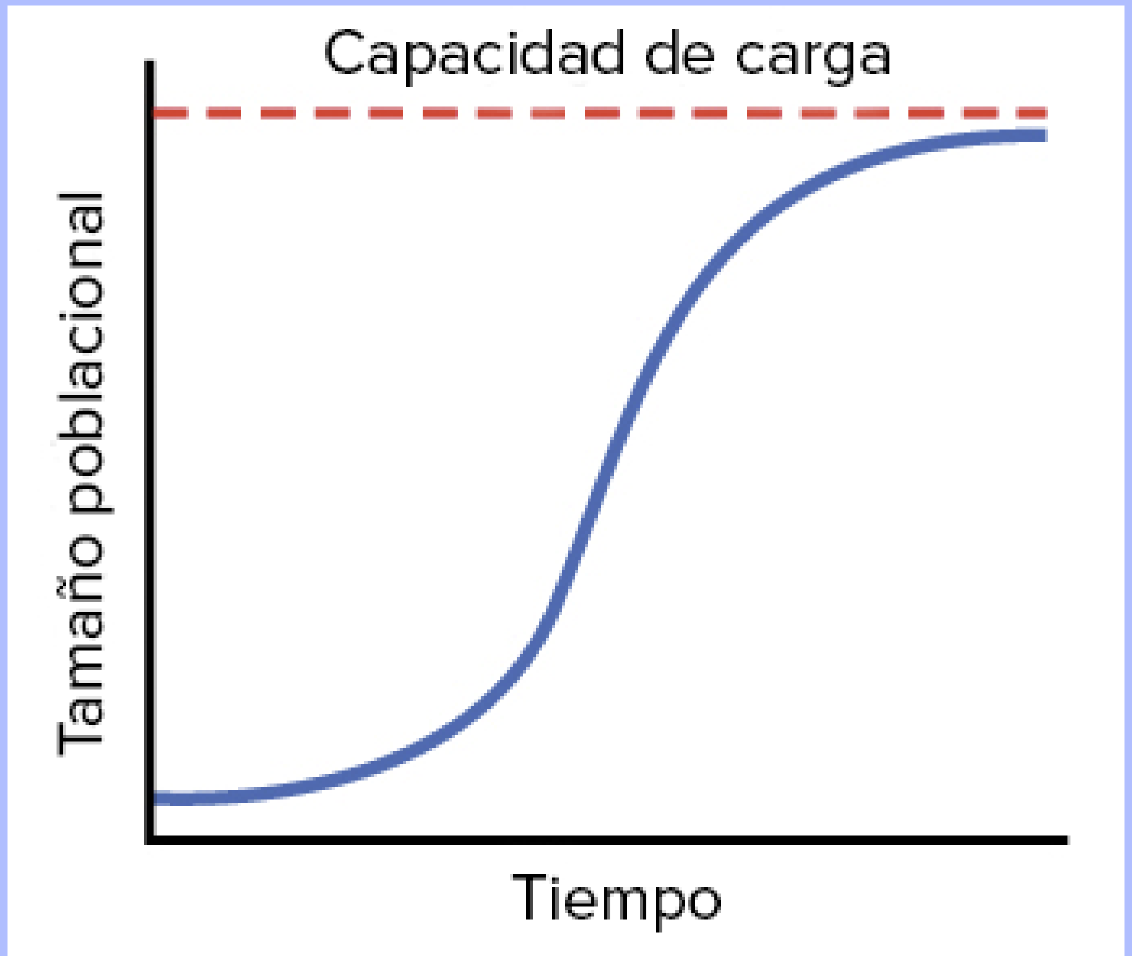
b) ¿Cómo debería verse un gráfico cuando la población de bacterias aumenta de tal forma que se alcanza la capacidad de carga k? ¿Qué ocurre con los nutrientes en ese punto?

c) Si de pronto se introducen al cultivo microorganismos que compiten por los mismos nutrientes que consumen las bacterias y disminuye la capacidad de carga a la mitad (k/2), ¿cómo debería verse el gráfico?



P2.

El tamaño de la población en el que el crecimiento poblacional se nivela representa el tamaño poblacional máximo que puede soportar un medio ambiente en particular y se conoce como **capacidad de carga o K.**



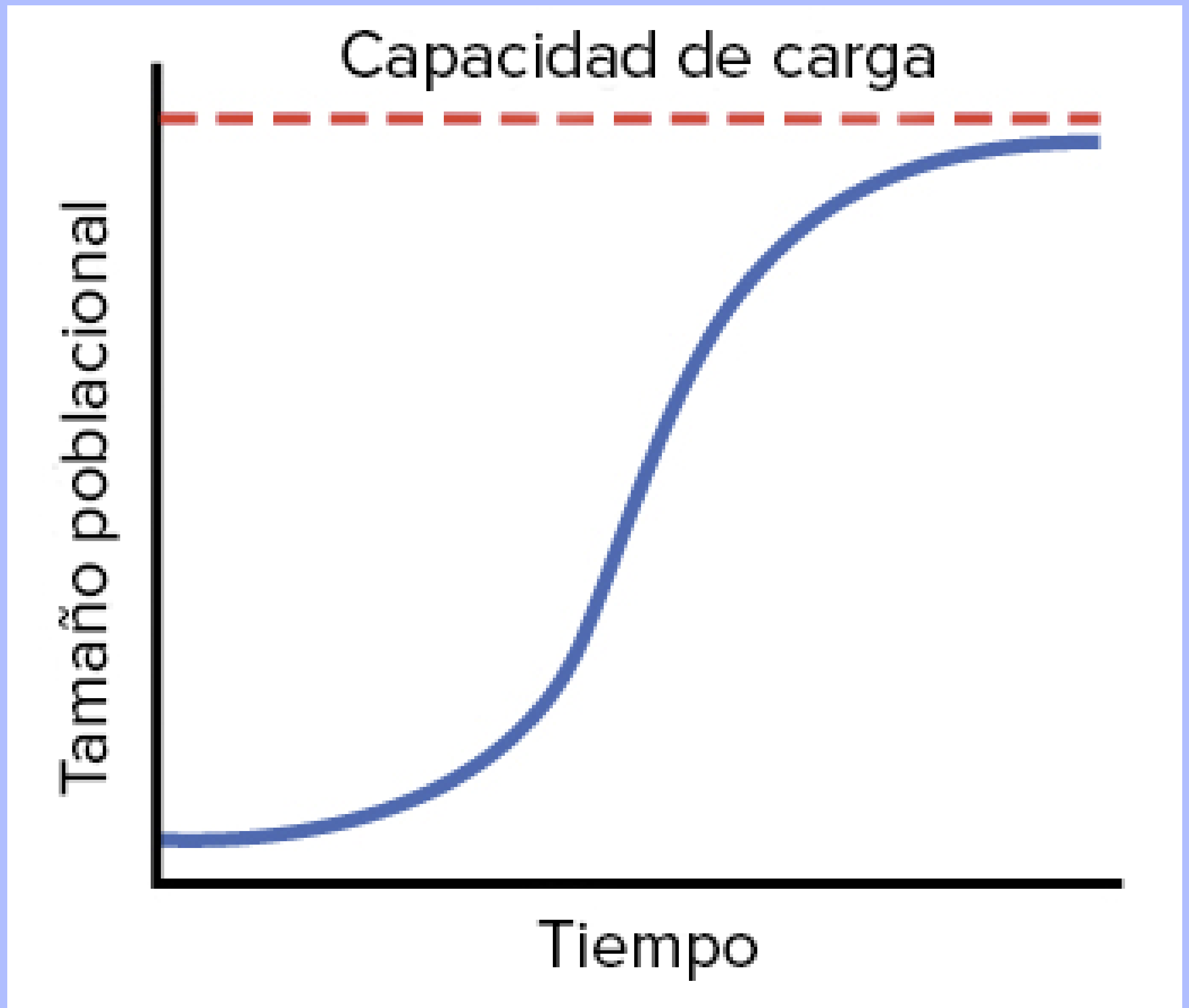
Se puede modelar matemáticamente el crecimiento de una población con capacidad de carga a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = g \cdot X \cdot \left(\frac{k - X}{k}\right)$$

g: tasa de crecimiento base
X: tamaño poblacional
k: capacidad de carga
(k-X): cantidad de individuos que pueden sumarse a la población antes de que esta alcance la capacidad de carga
(k-X)/k: fracción de la capacidad de carga aún disponible

P2.

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = g \cdot X \cdot \left(\frac{k - X}{k}\right)$$



Mientras más se haya agotado la capacidad de carga, mayor será la **reducción que el término (k-X)/k** tenga sobre la tasa de crecimiento (X cada vez es más cercano a k).

Cuando la **población es pequeña**, X es muy pequeña en comparación con k. En este punto el término (k-X)/k es aproximadamente (k/k), o 1, lo que resulta en un **crecimiento exponencial**.

Lo anterior se ajusta a la gráfica de la izquierda: la población crece de manera casi exponencial al principio, pero se va nivelando conforme se acerca a k.

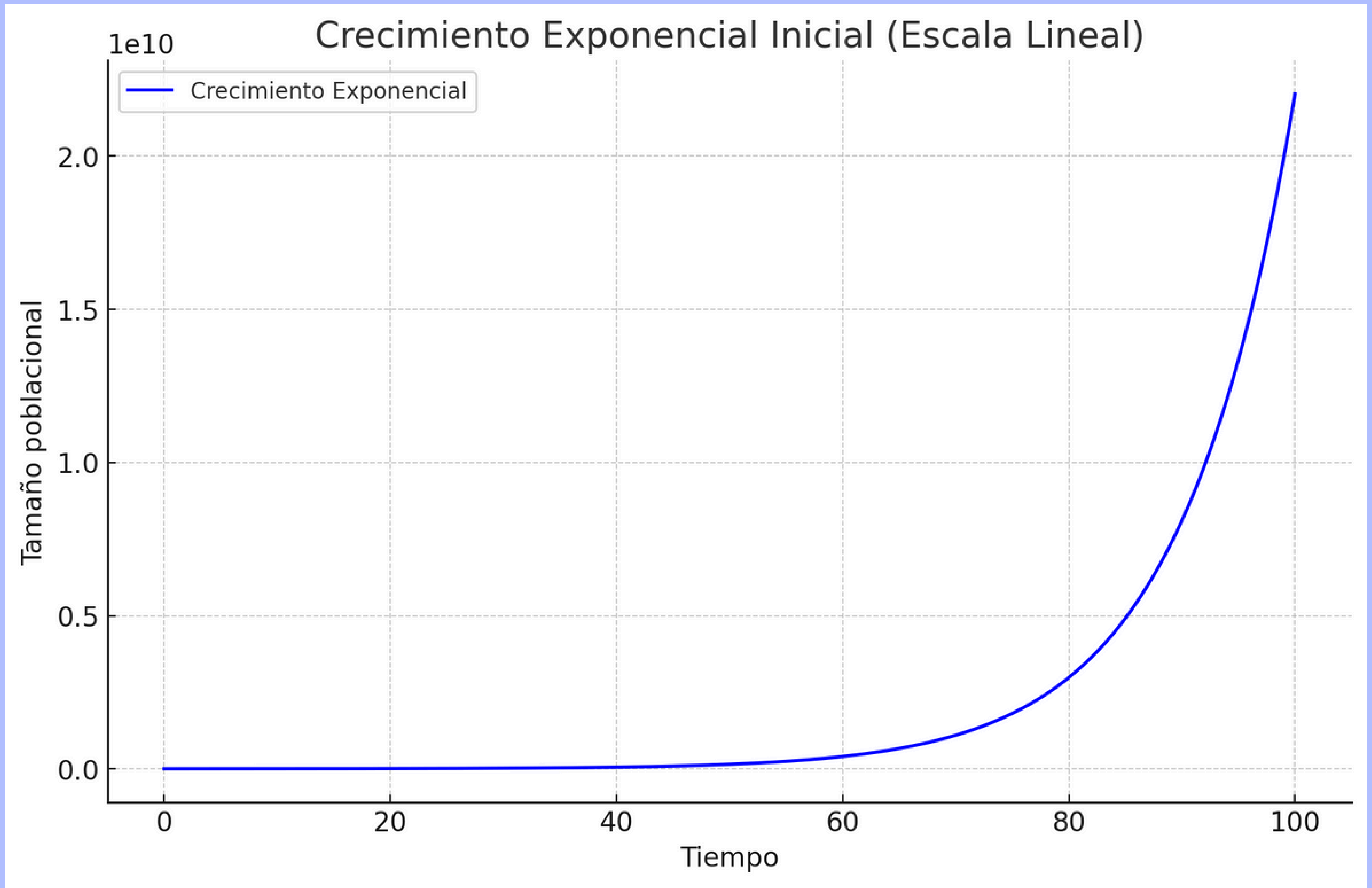
P2.

a) ¿Cómo debería verse un gráfico al inicio del experimento cuando los nutrientes disponibles son abundantes?

P2.

a) ¿Cómo debería verse un gráfico al inicio del experimento cuando los nutrientes disponibles son abundantes?

Al inicio, con nutrientes abundantes, la población debería crecer exponencialmente. El gráfico de la población (X) versus tiempo (t) mostraría una curva exponencial ascendente.



P2.

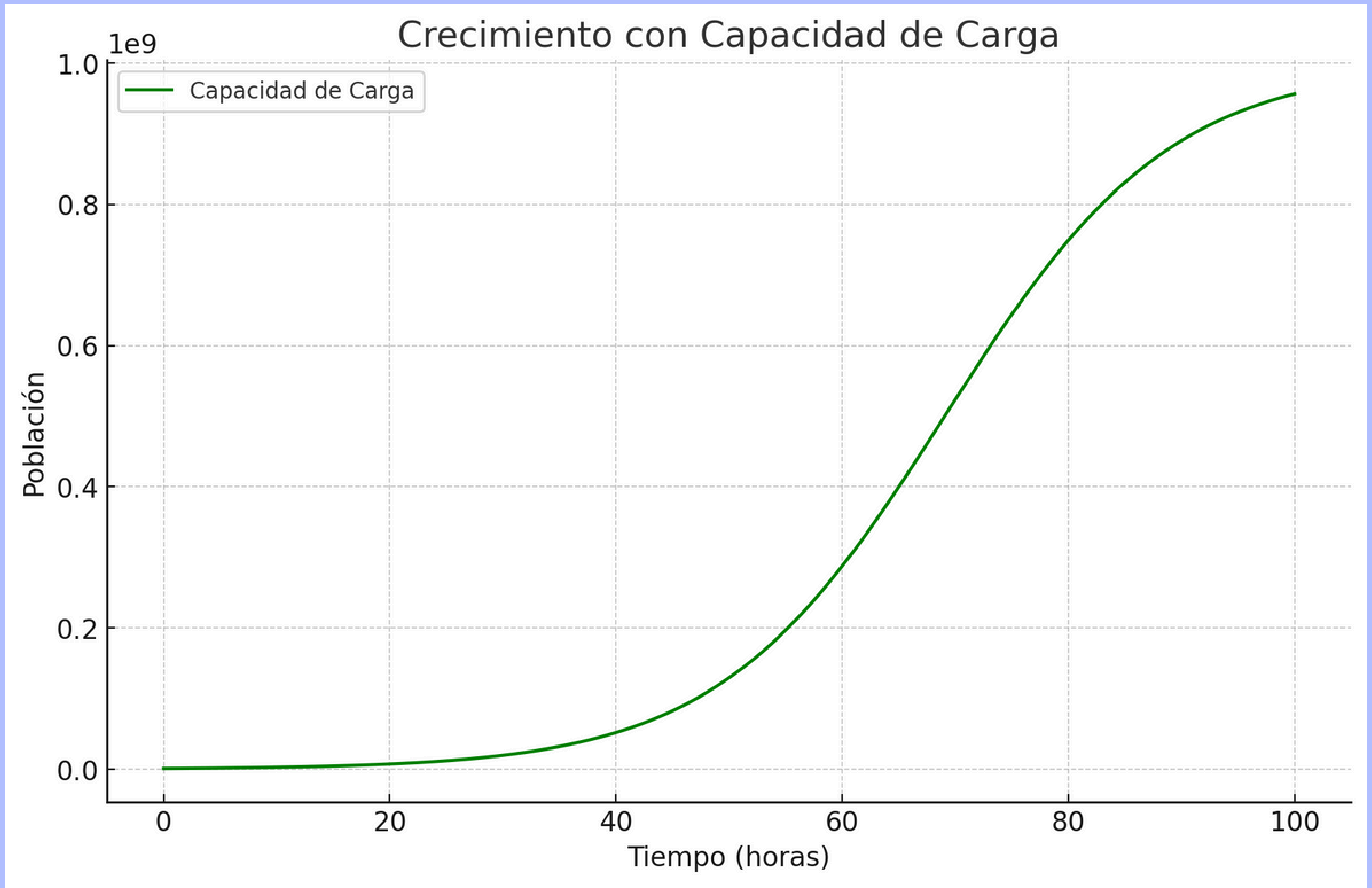
b) ¿Cómo debería verse un gráfico cuando la población de bacterias aumenta de tal forma que se alcanza la capacidad de carga k? ¿Qué ocurre con los nutrientes en ese punto?

P2.

b) ¿Cómo debería verse un gráfico cuando la población de bacterias aumenta de tal forma que se alcanza la capacidad de carga k? ¿Qué ocurre con los nutrientes en ese punto?

Cuando la población se acerca a la capacidad de carga, el crecimiento de la población se desacelera y eventualmente se estabiliza.

El gráfico de X versus t mostraría una curva sigmoidea (forma de "S") que se aplana al acercarse a k. En este punto, los nutrientes se agotan o se vuelven limitantes, y la tasa de crecimiento disminuye hasta casi cero.



P2.

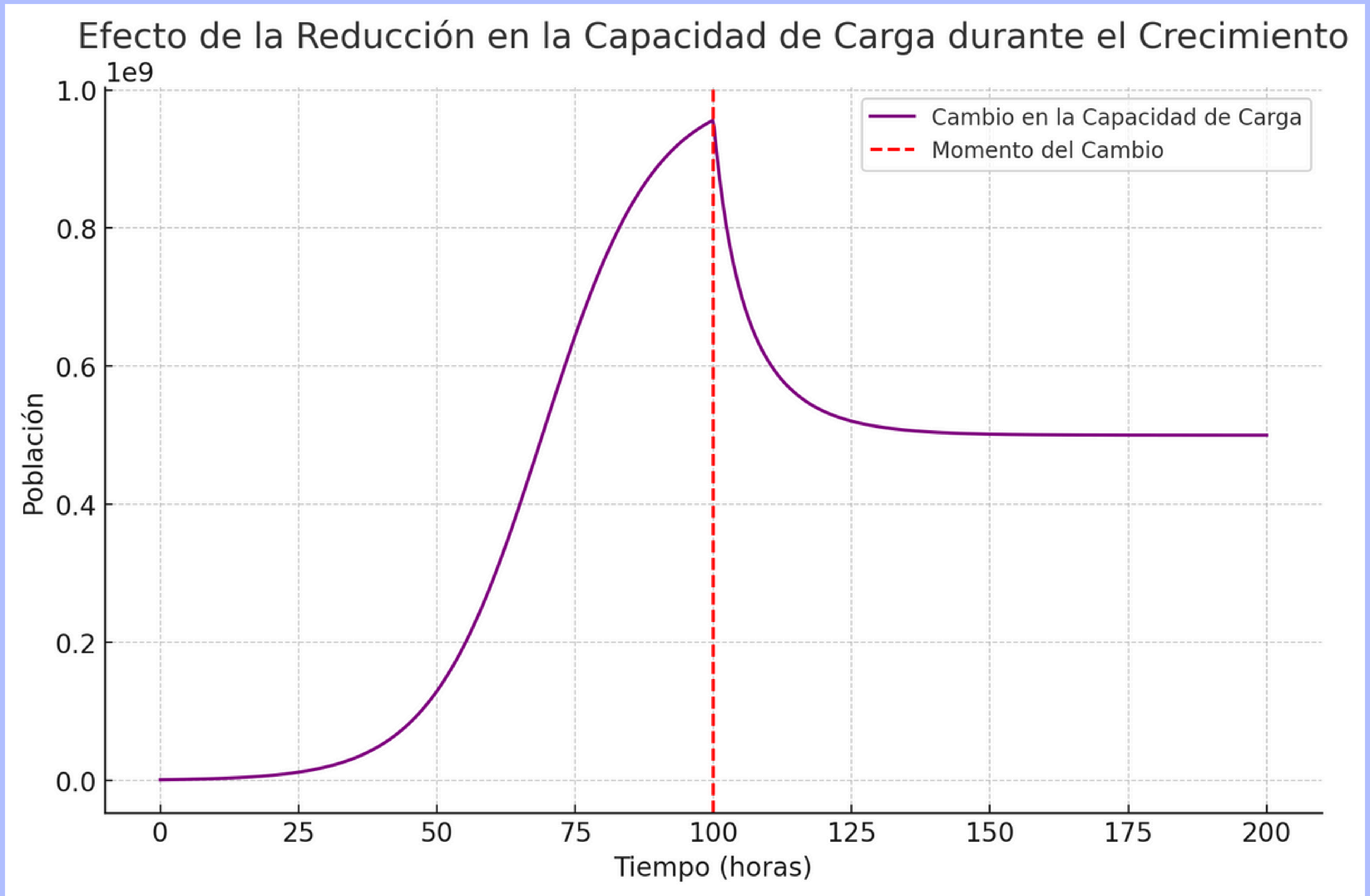
c) Si de pronto se introducen al cultivo microorganismos que compiten por los mismos nutrientes que consumen las bacterias y disminuye la capacidad de carga a la mitad (k/2), ¿cómo debería verse el gráfico?

P2.

c) Si de pronto se introducen al cultivo microorganismos que compiten por los mismos nutrientes que consumen las bacterias y disminuye la capacidad de carga a la mitad (k/2), ¿cómo debería verse el gráfico?

Si la capacidad de carga se reduce a la mitad, la nueva capacidad de carga sería 5×10^8 bacterias.

El gráfico de X versus t mostraría una nueva curva sigmoidea que se aplana antes, al alcanzarse la nueva capacidad de carga. La población estabilizada será menor debido a la reducción de nutrientes disponibles.



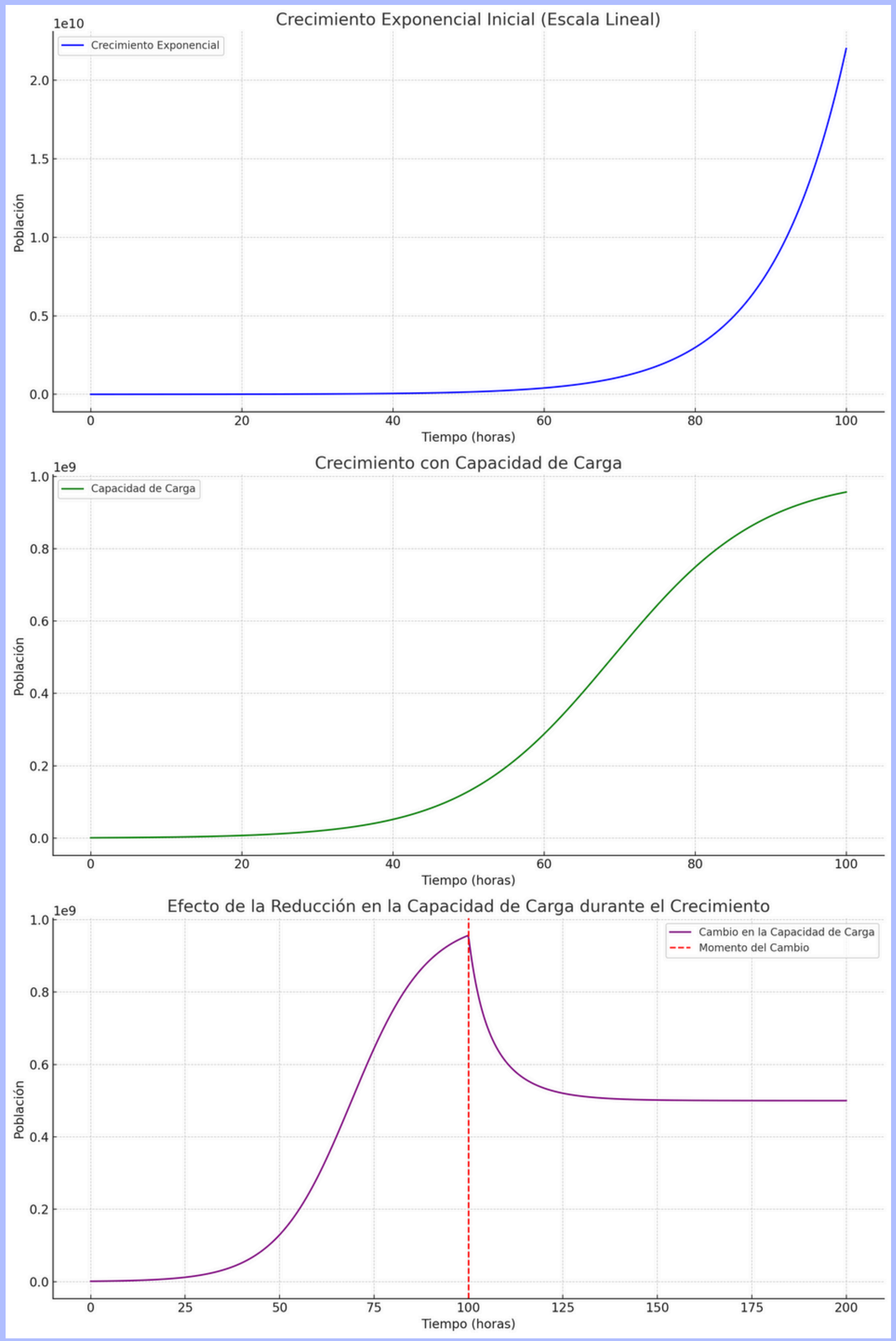
P2.

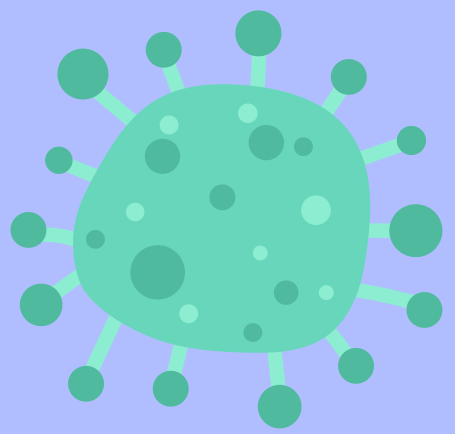
Resumen:

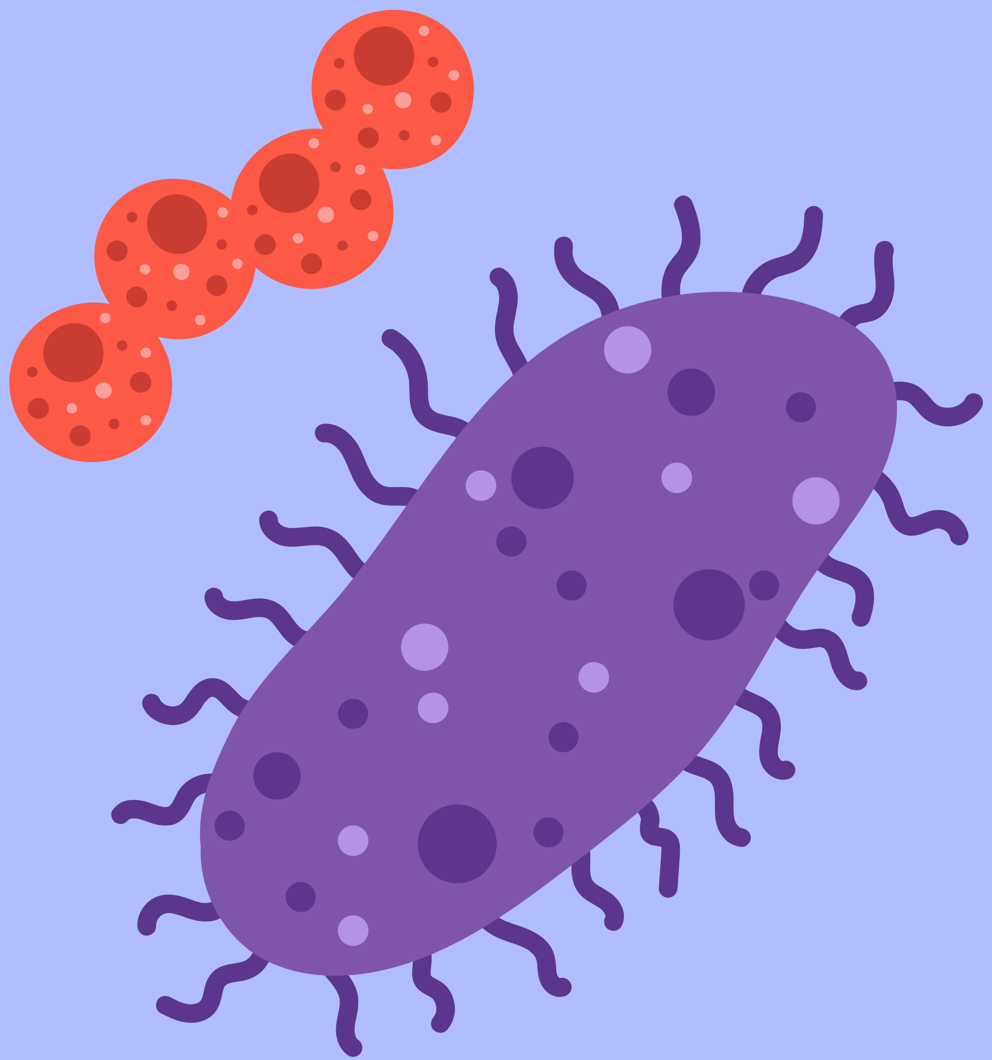
a) Inicio del experimento con nutrientes abundantes

b) Crecimiento al alcanzar la capacidad de carga

c) Disminución de la capacidad de carga de (b)







PREGUNTA 3

Modelamiento Matemático
para una epidemia

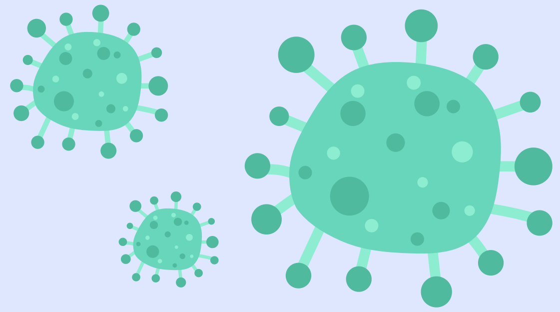
P3

En una región del continente asiático se ha presentado un **virus** que provoca una enfermedad altamente contagiosa para la humanidad, propagándose rápidamente entre los individuos de la población.

Para modelar matemáticamente la propagación de la enfermedad, se deben considerar dos grupos de personas:

- $S(t)$: población de personas susceptibles a contraer la enfermedad en el tiempo t.
- $I(t)$: población de personas infectadas por el virus en el tiempo t.

P3



Sabiendo que:

- Los individuos susceptibles, una vez infectados, no son capaces de eliminar el virus de su sistema, es decir, permanecen **infectados indefinidamente.**
- La tasa de infección, β [1/personas*día], es **proporcional** al número de personas susceptibles $S(t)$ y al número de personas infectadas **I(t)**
- Para controlar la propagación del virus, las autoridades han decidido cerrar sus fronteras, por lo tanto, **no entran ni salen personas de la región infectada**.

a) Plantee un balance para S(t) y para I(t)

P3

Respuesta: con el cierre fronteras, se tiene que:

$$N = S(t) + I(t) \text{ con } N \text{ constante}$$

Asimismo, **no se consideran términos de entrada ni salida** en los balances.

El balance para S corresponde a un único término de "**consumo**", proporcional a S e I según la constante β (tasa de infección).

El balance para I corresponde a un único término de "**generación**" que sigue la misma forma.

$$Ac = \cancel{E}^{0} - \cancel{S}^{0} + G - C$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I$$

P3

Bonus) Demuestre que la ecuación para el balance de la población de infectados I corresponde a la ecuación logística, es decir, tiene la siguiente forma:

$$\frac{dI}{dt} = \beta N I (1 - \frac{I}{N})$$

P3

Respuesta: Notemos que despejando S(t) de la ecuación N=S+I y reemplazando en el balance de infectados de la parte a), podemos obtener la expresión pedida:

$$\left.\begin{aligned} N &= S(t) + I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S I \end{aligned}\right\} \frac{dI}{dt} = \beta I (N - I)$$

P3

Respuesta: Notemos que despejando S(t) de la ecuación N=S+I y reemplazando en el balance de infectados de la parte a), podemos obtener la expresión pedida:

$$\left.\begin{aligned} N &= S(t) + I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S I \end{aligned}\right\} \frac{dI}{dt} = \beta I(N - I)$$

Multiplicando y dividiendo por N...

$$\frac{dI}{dt} = \beta N I(1 - \frac{I}{N})$$

P3

b) Genere un gráfico que muestre la evolución de S(t) e I(t) en el tiempo.

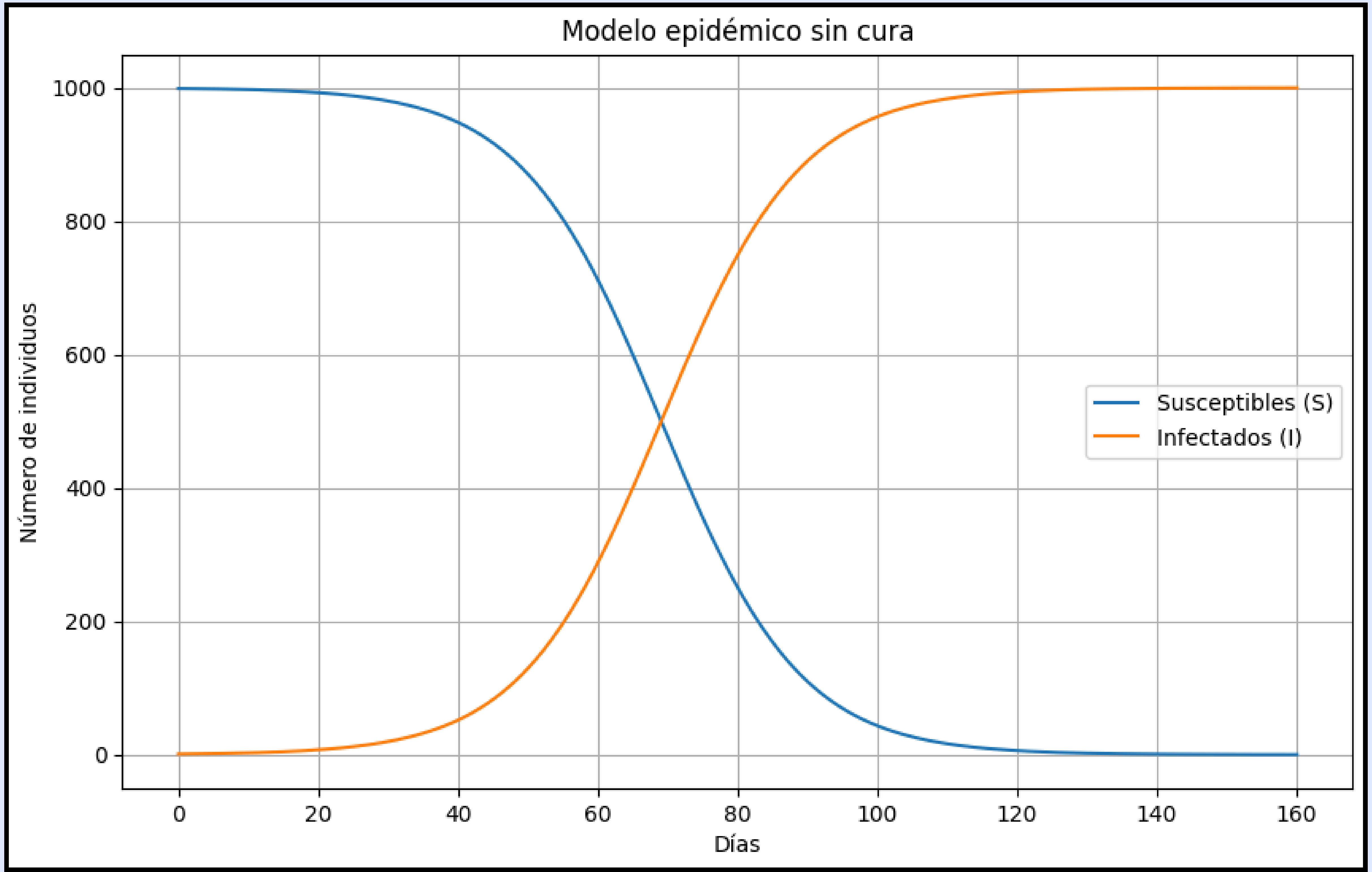
P3

b) Genere un gráfico que muestre la evolución de S(t) e I(t) en el tiempo.

Respuesta: la tasa de infección, I y S son siempre valores positivos, luego:

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I \geq 0$$

Como la acum. de infectados es positiva, el número de infectados aumenta hasta que toda la población se hace infecciosa.



P3

Con el tiempo, científicos lograron encontrar una cura, capaz de contrarrestar la presencia del virus en la población de infectados, surgiendo así una nueva población de **personas recuperadas R(t)**, que han desarrollado <u>inmunidad al virus</u> y <u>no pueden volver a ser infectadas</u>. Las personas logran recuperarse a una tasa de **y [1/día]**, la cual es **proporcional** al **número de personas infectadas.**

P3

c) Con esta nueva información, plantee balances sobre S(t), I(t) y R(t)

P3

c) Con esta nueva información, plantee balances sobre S(t), I(t) y R(t)

Respuesta: Se debe añadir un término de "consumo" en el balance de infectados, dado por la tasa de recuperación.

El balance de recuperados corresponde al mismo término, pero en la forma de "generación".

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I$$

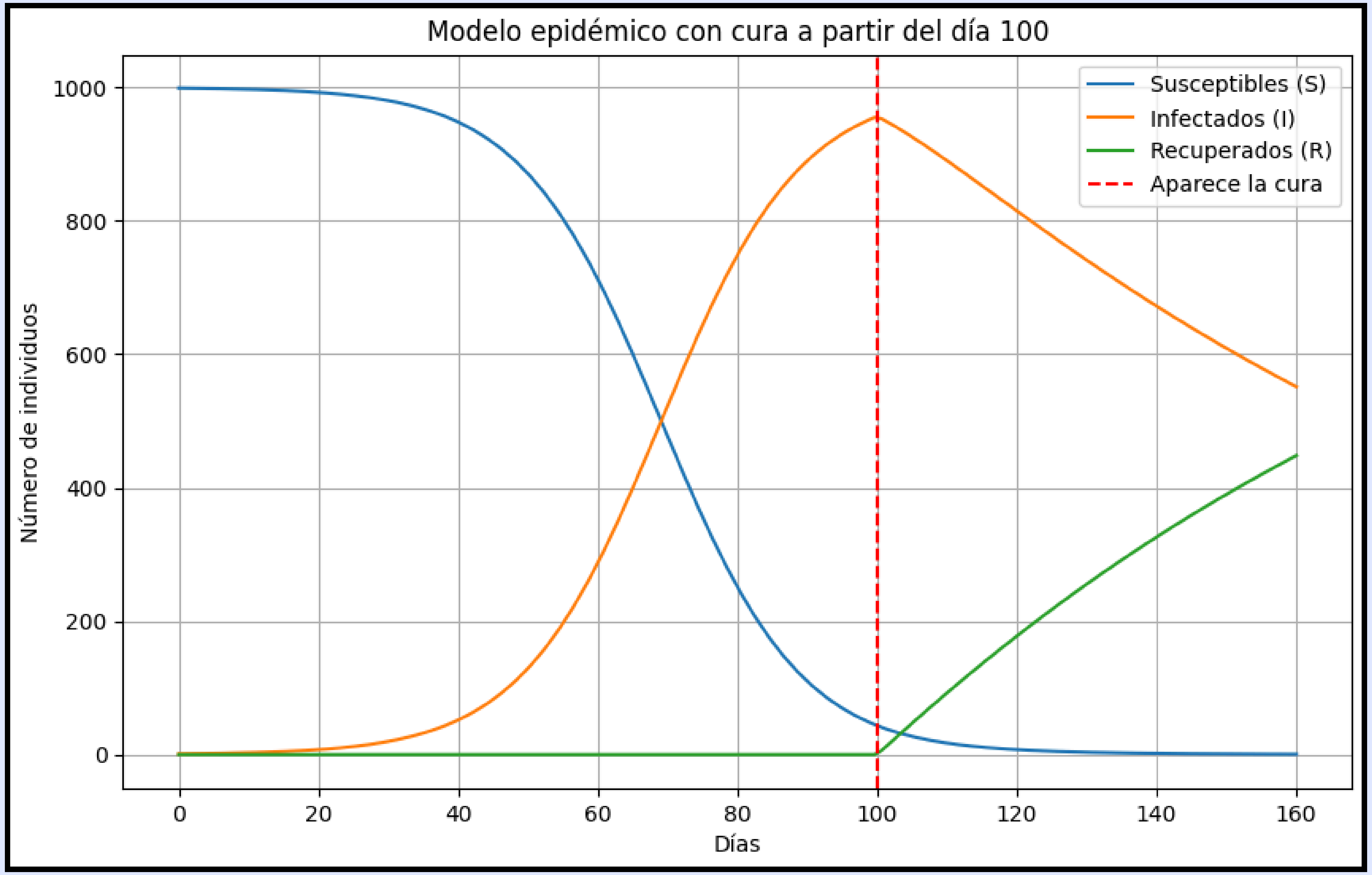
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

P3

d) Para este nuevo escenario, genere un gráfico que muestre la evolución de S(t),I(t) y R(t) a través del tiempo, considerando que la cura apareció luego de la propagación del virus

P3

d) Para este nuevo escenario, genere un gráfico que muestre la evolución de S(t),I(t) y R(t) a través del tiempo, considerando que la cura apareció luego de la propagación del virus



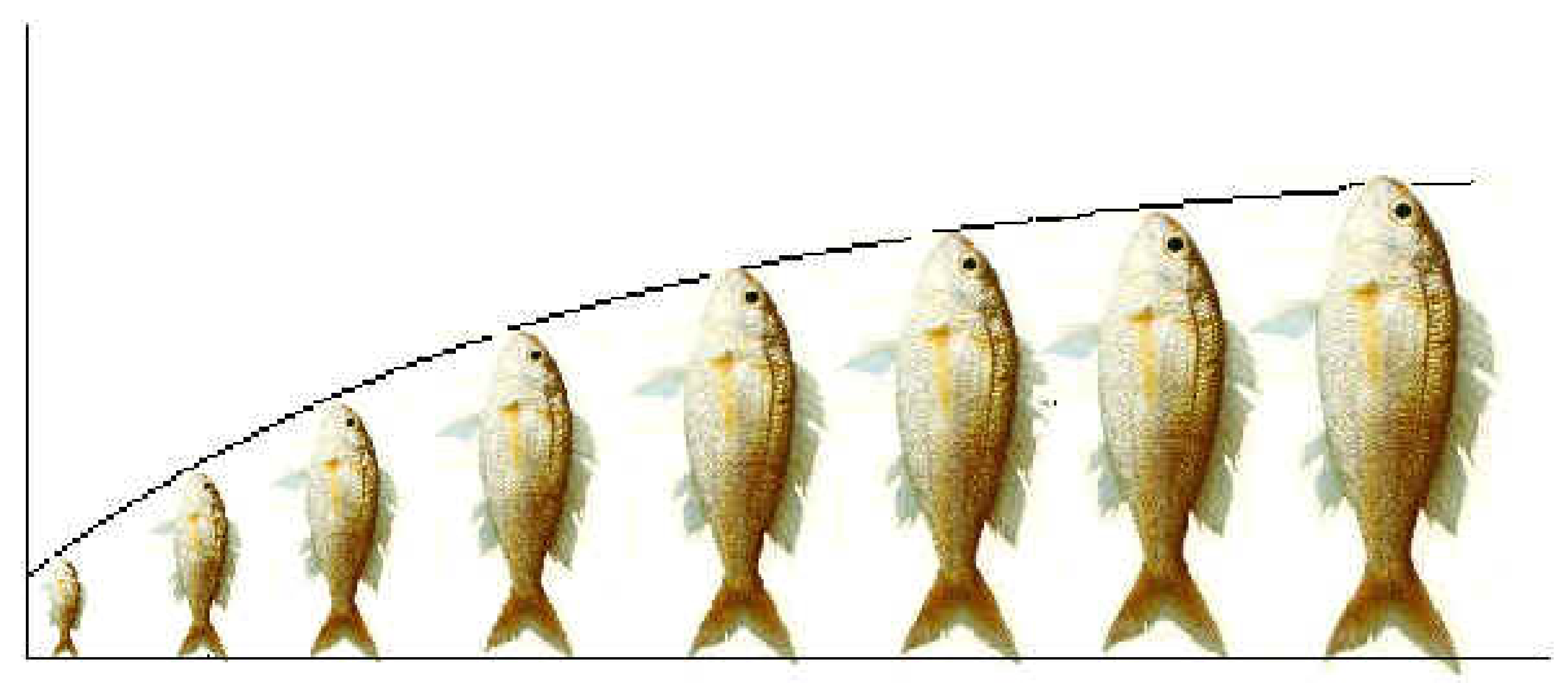
Respuesta: Antes de la cura, el modelo se mantiene igual que lo planteado en a).

Una vez que se añade la cura, los infectados comienzan a disminuir, al convertirse en recuperados. Cuando t tiende a infinito, toda la población se convierte en individuos recuperados.

PREGUNTA 4

Dinámica de crecimiento de un individuo

El biologo L. von Bertalanffy desarrolló un modelo matemático para el crecimiento de un individuo en función de su edad, basado en el anabolismo y catabolismo de un organismo. Se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces



Representación del modelo de von Bertalanffy en peces

El modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial y su solución:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = K \cdot (L_\infty - L)$$

$$L(t) = L_\infty \cdot (1 - e^{-K\cdot(t-t_0)})$$

- L: Longitud del pez en el tiempo t
- L_∞: Longitud máxima que el pez puede alcanzar a medida que el tiempo tiende a infinito
- K: Constante de proporcionalidad
- t: Tiempo
- t_0: tiempo hipotético en el que $L = 0$. Parámetro matemático, no biológico

py.

a. ¿Cómo se vería una representación gráfica del modelo (con tiempo en años y longitud en centímetros)? ¿Qué representaría el término de longitud máxima matemáticamente?

py.

a. ¿Cómo se vería una representación gráfica del modelo (con tiempo en años y longitud en centímetros)? ¿Qué representaría el término de longitud máxima matemáticamente?

$$L(t) = L_\infty \cdot (1 - e^{-K\cdot(t-t_0)})$$

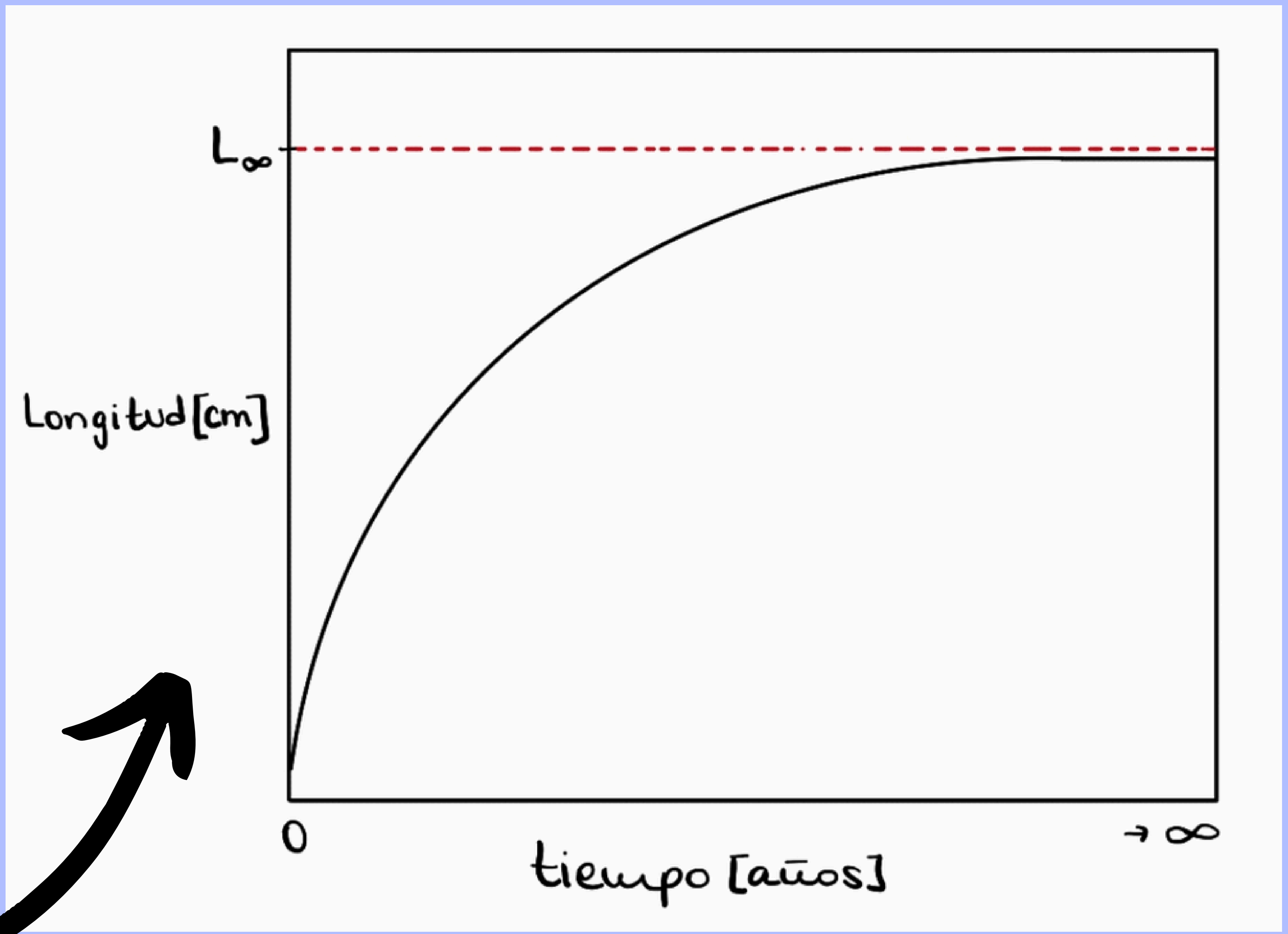
Analizando la ecuación se puede concluir que:

1. El crecimiento de los peces no se produce a la misma velocidad a lo largo del tiempo.
2. La velocidad de crecimiento inicial es muy rápida; después, a medida que el pez aumenta de tamaño y madura sexualmente, la tasa de crecimiento va decreciendo poco a poco hasta ser prácticamente nula (el pez deja de crecer)

p4.

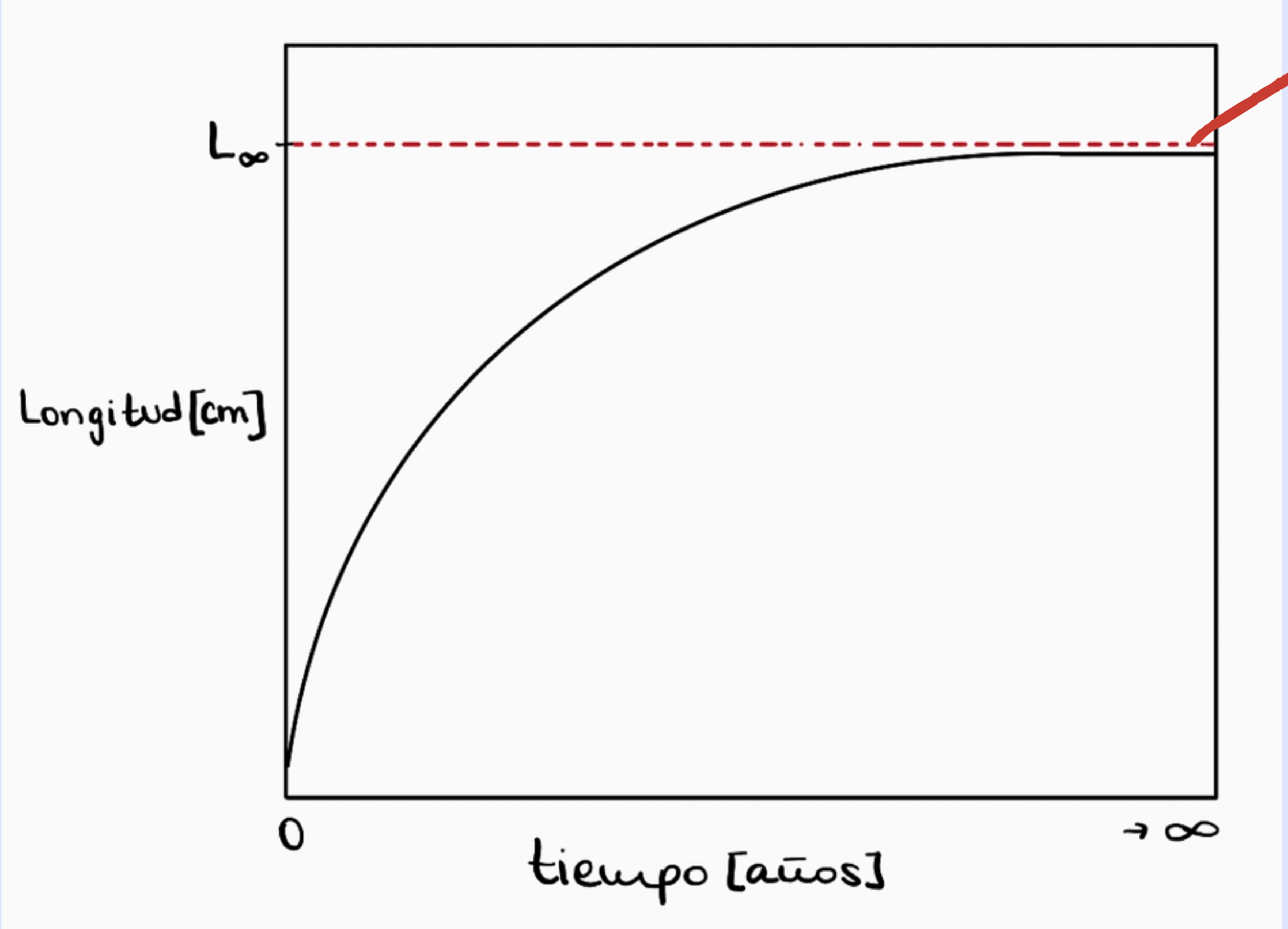
a. ¿Cómo se vería una representación gráfica del modelo (con tiempo en años y longitud en centímetros)? ¿Qué representaría el término de longitud máxima matemáticamente?

En otras palabras, se debe observar un comportamiento exponencial en el gráfico, además de un aumento en la longitud a medida que pasa el tiempo, hasta un cierto valor máximo



p4.

a. ¿Cómo se vería una representación gráfica del modelo (con tiempo en años y longitud en centímetros)? ¿Qué representaría el término de longitud máxima matemáticamente?



El valor máximo de la longitud que tiende al infinito corresponde a una asíntota de la función.

Cabe mencionar que si aplicamos el modelo a datos experimentales, pueden haber individuos que sobrepasen esta longitud máxima. Las curva del gráfico correspondería a un ajuste de los datos similar a la función del modelo

p4.

b. Si hubiera una variación en K debido a cambios en las condiciones ambientales, ¿qué efecto tendría esto en el crecimiento del pez? ¿Cómo lo representaría en las ecuaciones anteriores?

p4.

b. Si hubiera una variación en K debido a cambios en las condiciones ambientales, ¿qué efecto tendría esto en el crecimiento del pez? ¿Cómo lo representaría en las ecuaciones anteriores?

Analizando la ecuación del modelo, en cualquiera de sus dos formas, notamos que si la constante K varía debido a cambios en las condiciones ambientales, esto afectará la rapidez con la que el pez se aproxima a su longitud máxima.

$$L(t) = L_\infty \cdot (1 - e^{-K\cdot(t-t_0)})$$

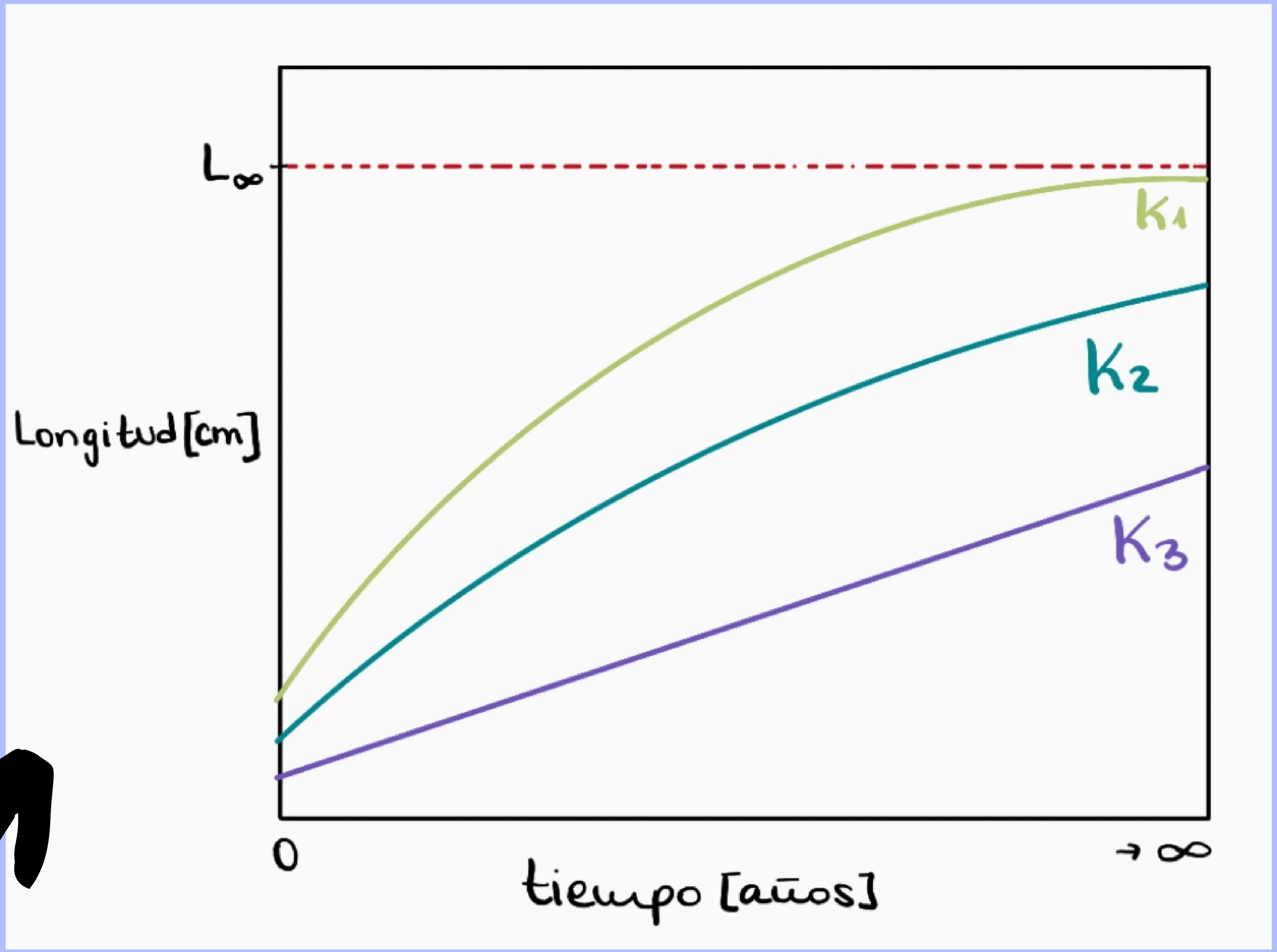
- **Si K aumenta, el término de la exponencial disminuye y L se acerca más a L_∞**
- **Si K disminuye, el término de la exponencial aumenta y por lo tanto la resta se hace mayor.**

py.

b. Si hubiera una variación en K debido a cambios en las condiciones ambientales, ¿qué efecto tendría esto en el crecimiento del pez? Explique.

Graficamente, si tomamos constantes hipotéticas K1, K2 y K3, donde:

K1 > K2 > K3



Un aumento en K resultará en un crecimiento más rápido hacia L∞, mientras que una disminución en K hará que el crecimiento sea más lento

AUXILIAR N°5