FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 14

Series

P1 Estudie la convergencia de las siguientes series

a) $\sum \dfrac{4^n + n}{3^{n-1} + 2n}$

b) $\sum n^3 e^{-2n}$

c) $\sum \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{n}$

d) $\sum \dfrac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^4 + \ln(n)}}$

e) $\sum (-1)^n \arctan(\dfrac{1}{2n+1})$

f) $\sum \dfrac{1}{n \ln(\ln(n))}$

P2 Sea (a_n) una sucesión de términos positivos. Suponga que la serie $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ es convergente, ¿es cierto que la serie $\sum a_n$ también converge?

P3 Determine los radios e intervalos de convergencias de las siguientes series de potencias

a) $\sum \left(\dfrac{2x}{3}\right)^k$

b) $\sum \dfrac{(-1)^k x^k}{(2k)!}$

c) $\sum (-1)^k x^{2k}$

Problemas propuestos

P4 Dada la serie $S = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \dots$

a) Determine la suma parcial s_n

b) Muestre que la serie S converge y calcule su valor

P5 Determine para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$ converge.

P6 Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua y creciente en $[0,1]$ tal que $g(0) = 0$ y la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx$ converge. ¿Qué puede decir sobre la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{n})$?

P7 Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal que $\sum a_n$ converge.

a) ¿Es cierto que $\sum \sin(a_n)$ converge?

b) ¿Es cierto que $\sum a_n^2$ converge?

c) ¿Es cierto que $\sum \frac{a_n}{1-a_n}$ converge?

Recuerdos

Def. Dado una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se define sus sumas parciales como $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. El valor de la serie asociada existe cuando la sucesión (S_n) posee el límite, y en tal caso la serie se dice convergente y su valor es el límite de (S_n).

Prop 1. *Si* $\sum a_k$ *converge, entonces* $a_n \to 0$.

Prop 2. *Sean* $\sum a_k$ *y* $\sum b_k$ *dos series convergentes y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces la siguiente suma converge:*

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

Teo 1 (Comparación)**.** *Sean* (a_n) *y* (b_n) *sucesiones no negativas tales que existe* n_0 *y* $\alpha > 0$ *tales que, para todo* $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. *Se tiene que si* $\sum b_k < \infty$, *entonces* $\sum a_k < \infty$.

Teo 2 (Comparación por Cociente)**.** *Sean* $(a_n), (b_n)$ *sucesiones positivas tales que* $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ *existe.*

i) Si $c = 0$ *y* $\sum b_k$ *converge, entonces* $\sum a_k$ *converge.*

ii) Si $c > 0$, $\sum b_k$ *converge si y sólo si* $\sum a_k$ *converge.*

Teo 3 (Criterio del Cuociente)**.** *Sea* (a_n) *una sucesión tal que* $r = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *existe.*

i) Si $r < 1$ *entonces* $\sum a_k$ *converge.*

ii) Si $r > 1$ *o* $r = \infty$ *entonces* $\sum a_k$ *diverge.*

Teo 4 (Criterio de la Raíz)**.** *Sea* (a_n) *una sucesión de términos no negativos tal que* $r = \lim (a_n)^{1/n}$ *existe.*

i) Si $r < 1$ *entonces* $\sum a_k$ *converge.*

ii) Si $r > 1$ *entonces* $\sum a_k$ *diverge.*

Teo 5 (Criterio de la Integral)**.** *Sea* $k \in \mathbb{N}$ *y* $f : [k, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *una función decreciente. Se tiene que* $\sum\limits_{n\geq k} f(n)$ *converge si y sólo si* $\int_k^\infty f(x)dx$ *converge.*

Def. Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.

Prop 3. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente converge si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.*

Teo 6 (Criterio de Leibniz)**.** *Sea* (a_n) *una sucesión decreciente tal que* $a_n \to 0$ *(luego* (a_n) *no negativa). Entonces* $\sum (-1)^n a_n$ *es convergente.*

Def. Una **serie de potencias** es una serie de la forma $\sum a_k x^k$

Def. Se define el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias $\sum a_k x^k$, como

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_k x^k < \infty\}$$

Def. Se define el **radio de convergencia** de la serie de potencias $\sum a_k x^k$, como $R = \sup(I)$

Obs. Hay cuatro casos posibles $I = (-R, R)$, $I = (-R, R]$, $I = [-R, R)$ o $I = [-R, R]$