FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 10

TFC

P1 Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente tal que es derivable en $(1, +\infty)$ y $f(1) = 1$. Considere la función $F : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^{x^2} f(t)\, dt$$

Estudie el crecimiento, los signos y la convexidad de la función F

P2 Sea $k \in \mathbb{N}$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^1 t^k f(tx)\, dt$$

Donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Estudie la derivabilidad de F

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sean $(a_n), (b_n)$ sucesiones tales que

$$a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Defina la sucesión $I_n = \displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx$. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$

Problemas propuestos

P4 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo p. Demuestre que $\displaystyle\int_a^{a+p} f = \int_0^p f, \forall a \in \mathbb{R}$

P5 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable, ¿es cierto que existe un $\xi \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$?

P6 Sea $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ una función continua tal que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. ¿Qué se puede decir sobre f?

P7 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y no negativas, calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)\, dx$$

Prop 1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_a^x f$ es continua.*

Teo 1 (TFC1)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces G es derivable en (a,b) y:*

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right) = f(x), \quad \forall x \in (a,b)$$

Teo 2 (TFC2)**.** *Sea f integrable en $[a,b]$, si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que: $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Prop 2 (IPP integrales)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ continuas en I y diferenciables en $int(I)$. Si f', g' son continuas, entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b gf', \quad \forall a, b \in int(I)$$

Prop 3 (CV)**.** *Sea g continua en I y derivable en $int(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$ con $a < b$. Sea f continua en $g([a,b])$, entonces:*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Teo 3 (TVM integral)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f = (b-a)f(\xi)$$

Teo 4 (TVM integral general)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable que no cambia de signo, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$