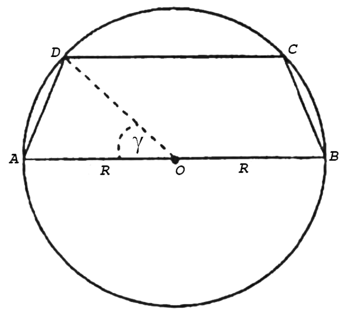
MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 4

P1 Considere el trapecio isósceles $ABCD$, en donde $AD = CB$ que está inscrito en el semicírculo de centro O y radio R.



a) Determine una expresión para el área del trapecio en función del ángulo al centro γ

b) Determine para qué valor de γ el área es máxima y calcule dicha área.

P2 Utilice el TVM para probar que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ para todo $x > 0$

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(2) = 0$. Sea $F(x) = (x-1)^2 f(x)$. Demuestre que existe un $\xi \in (1,2)$ tal que $F''(\xi) = 0$

P4 Calcule los siguientes limites

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$

Problemas propuestos

P5 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, estrictamente positiva y diferenciable en (a,b). Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

P6 Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. Utilice la Regla de L'Hopital para estudiar las asíntotas de f

Recuerdos

Def. $\overline{x}$ es mínimo local de $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$$

De manera análoga se define el máximo local

Teo 1 (Regla de Fermat). *Si $\overline{x} \in (a, b)$ es mínimo (o máximo) local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x}) = 0$*

Teo 2 (TVM). *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teo 3 (L'Hopital). *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables tales que:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$, con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Luego:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

Teo 4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0), $\forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente). Si la desigualdad es estricta, la monotonía también.*

Def (Convexidad). Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

f se dirá cóncava si $-f$ es convexa.

Teo 5. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b).*