FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 2

P1 Sea $f : [0, 2] \to [0, 4]$ continua. Pruebe que existe un $x_0 \in [0, 2]$ tal que $f(x_0) = x_0^2$

Sol.

- *Sea* $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = f(x) - x^2$.
- *Notar que* g *es continua al ser una resta de funciones continuas*
- *Vemos que* $g(0) = f(0) - 0^2 = f(0)$
- *Como* $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2]$, *se tiene que* $g(0) = f(0) \geq 0$
- *Por otro lado,* $g(2) = f(2) - 2^2 = f(2) - 4$
- *Como* $f(x) \leq 4, \forall x \in [0, 2]$, *se tiene que* $f(2) \leq 4$, *y con ello* $g(2) \leq 0$
- *Por lo anterior, obtenemos que* $g(0)g(2) \leq 0$, *luego en virtud del Teorema de Bolzano, se concluye que* $\exists x_0 \in [0, 2]$ *tal que* $g(x_0) = 0$, *lo que es equivalente a* $f(x_0) = x_0^2$

P2 Pruebe que en la línea del ecuador siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura

Sol.

- *Suponemos que la línea del ecuador es una circunferencia perfecta.*
- *Sea* P_0 *un punto cualquiera en la circunferencia.*
- *Denotamos por* P_α *al punto que se obtiene al recorrer* α *radianes en la circunferencia desde el punto* P_0
- *Sea* $T(\alpha)$ *la función que mide la temperatura en el punto* P_α
- *Notar que* T *es continua, pues la temperatura varía gradualmente*
- *Notar que dos puntos son diametralmente opuestos si y solo si tienen la forma* P_α *y* $P_{\alpha+\pi}$
- *P.D.Q.* $\exists \theta \in [0, \pi]$ *tal que* $T(\theta) = T(\theta + \pi)$
- *Sea* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(\alpha) = T(\alpha + \pi) - T(\alpha)$
- *Notar que* f *es continua por álgebra y composición de funciones continuas*
- *Vemos que* $f(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = T(0) - T(\pi) = -(T(\pi) - T(0)) = -f(0)$
- *Luego,* $f(0)f(\pi) = -f(0)^2 \leq 0$, *con ello, el Teorema de Bolzano asegura la existencia de un* $\theta \in [0, \pi]$ *tal que* $f(\theta) = 0$. *Es decir,* $T(\theta) = T(\theta + \pi)$.

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Pruebe que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sol.

- *Como* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$*, existe un* $m_1 < 0$*, tal que* $f(x) > f(0)$ *para cada* $x \leq m_1$
- *Como* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*, existe un* $m_2 > 0$*, tal que* $f(x) > f(0)$ *para cada* $x \geq m_2$
- *Como* f *es continua, en particular* $f|_{[m_1,m_2]}$ *es continua.*
- *Por Teorema de Weierstrass,* $f|_{[m_1,m_2]}$ *alcanza su mínimo, es decir, existe un* $x_0 \in [m_1, m_2]$ *tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para cada* $x \in [m_1, m_2]$
- *En particular, como* $m_1 < 0 < m_2$*, se tiene que* $f(0) \geq f(x_0)$
- *Por otro lado, si* $x \notin [m_1, m_2]$*, entonces* $x < m_1 \vee x > m_2$*, y según lo visto al inicio, se tiene que* $f(x) > f(0)$*, lo que implica* $f(x) > f(x_0)$
- *En conclusión, se tiene que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$

P4 Sea $f : A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Estudie la continuidad uniforme de f en cada caso:

a) Si $A = (0, \infty)$

b) Si $A = (a, b)$, con $0 < a < b$

c) Si $A = [a, \infty)$, con $a > 0$

Sol.

a*)* $A = (0, \infty)$

- *Demostremos que* f *no es uniformemente continua, es decir,*

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, y > 0, |x - y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

- *Sea* $\varepsilon = 1$.
- *Sea* $\delta > 0$ *arbitrario.*
- *Por Arquimediana, existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n} \leq \delta$
- *Sean* $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$*, notar que* $x, y \in A$
- *Notamos que*

$$|x - y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \delta$$

- *Además,*

$$|f(x) - f(y)| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n^2 - (n+1)^2| = 2n + 1 > 1 = \varepsilon$$

Que es lo que queríamos probar.

b) *$A = (a, b)$ con $0 < a < b$*

- *Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$*
- *Notemos que g es continua y $[a, b]$ es cerrado y acotado*
- *Luego, por Teorema, se tiene que g es uniformemente continua.*
- *En particular, $f = g|_{(a,b)}$ también es uniformemente continua*

c) *$A = [a, \infty)$ con $a > 0$*

- *Probemos que f es uniformemente continua, es decir,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- *Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.*
- *Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, existe un $m > a$ tal que*

$$f(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}, \; \forall x \geq m \tag{1}$$

- *Como f es continua, en particular $f|_{[a,m]}$ también lo es.*
- *Luego, como $[a, m]$ es un cerrado y acotado, por Teorema se tiene que $f|_{[a,m]}$ es uniformemente continua, esto implica la existencia de un $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in [a, m], |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

- *Sean $x, y \in A$ arbitrarios tales que $|x - y| \leq \delta$, necesitamos probar que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, para ello distinguiremos tres casos.*
- ***[Caso 1].*** *($x, y \geq m$) En este caso, se tiene que*

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \overset{(1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$$

- ***[Caso 2].*** *($x, y \in [a, m]$) Aquí se tiene que*

$$|f(x) - f(y)| \overset{(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

- ***[Caso 3].*** *($a \leq x \leq m \leq y$) Por último, se tiene que*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(f(x) - f(m)) - (f(y) - f(m))| \\ &\leq |f(x) - f(m)| + |f(y) - f(m)| \\ &\overset{(2)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + |f(y)| + |f(m)| \\ &\overset{(1)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

- *Sin pérdida de generalidad, hemos cubierto cada caso posible*
- *Por lo tanto, se concluye que f es uniformemente continua.*