FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral, Verano 2023
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 2

Teoremas de continuidad

P1 Sea $f : [0,2] \to [0,4]$ continua. Pruebe que existe un $x_0 \in [0,2]$ tal que $f(x_0) = x_0^2$

P2 Pruebe que en la línea del ecuador siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Pruebe que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4 Sea $f : A \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Estudie la continuidad uniforme de f en cada caso:

a) Si $A = (0, \infty)$

b) Si $A = (a, b)$, con $0 < a < b$

c) Si $A = [a, \infty)$, con $a > 0$

Problemas propuestos

P5 Pruebe que la ecuación $x^3 = 2x^2 + 3x - 3$ posee exactamente tres soluciones

P6 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periódica. Pruebe que f alcanza máximo y mínimo y concluya que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$

P7 Estudie la continuidad uniforme en $(0,1)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $g(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

P8 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Pruebe que f es uniformemente continua.

Recuerdos

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** en $x_0 \in A$ si:

$$\forall (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$$

Prop 1 (Épsilon-Delta). *$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ ssi:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A,\ |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** si f es continua en x_0, para todo $x_0 \in A$

Teo 1 (Bolzano). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Teo 2 (TVI). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $c, d \in f([a, b])$ con $c \leq d$. Entonces para todo $y_0 \in [c, d]$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$*

Teo 3 (Weierstrass). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Teo 4. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

Def. Diremos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A,\ |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prop 2. *Toda función uniformemente continua, es continua.*

Teo 5. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua.*