CAPÍTULO 2

Controlabilidad de sistemas lineales

En esta capítulo consideraremos un caso particular de la ecuación controlada (1.1), en la cual la dinámica tiene una estructura lineal:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \qquad \text{c.t.p. } t \in I; \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

donde $I \subseteq I\!R$ es un intervalo tal que $0 \in I$, $u(\cdot) \in \mathcal{A} = L^{\infty}_{loc}(I, U) := \{u : I \to U \subseteq I\!R^m : u(\cdot) \in L^{\infty}_{loc}(I, I\!R^m)\}$, y además $A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times m})$ y $r(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^n)$. Para mayor comodidad, en caso que sea necesario también denotaremos el conjunto de controles admisibles por $\mathcal{A}_U$.

Definición 2.1. *Para* (2.1) *con* $x_0 \in V$, $T > 0$ *dados, definimos el* ***conjunto de puntos accesibles*** *desde* x_0 *en un tiempo* T *como:*

$$\mathrm{Acc}(x_0, T) := \{x(T; x_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{A}\}.$$

Adoptaremos la siguiente convención $\mathrm{Acc}(x_0, T) := \{x_0\}$ *si* $T = 0$. *Nuevamente, para mayor comodidad, en caso que sea necesario también denotaremos el conjunto anterior por* $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$.

Es sabido que la solución de (2.1) viene dada por la Fórmula de Variación de Parámetros

$$x(t) = X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \tag{2.2}$$

donde $X(\cdot)$ corresponde a la resolvente de la ecuación homogénea $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. En (2.2) se tiene que $X(\cdot) \in AC(I, I\!R^{n\times n})$, absolutamente continua, cuando $A(\cdot) \in L^1_{loc}(I, I\!R^{n\times n})$.

En lo que sigue nos será de utilidad definir los siguientes elementos

$$x_0^* := X(t)x_0 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}r(s)ds \tag{2.3}$$

y la función lineal $\Phi : \mathcal{A} \to I\!R^n$

$$\Phi(u(\cdot)) := X(t)\int_0^t X(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \tag{2.4}$$

Así, de lo anterior obtenemos:

$$\mathrm{Acc}_U(x_0, T) = x_0^* + \Phi(\mathcal{A}_U) \tag{2.5}$$

Con lo cual podemos observar que si $x_0^* = 0$ y si $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial, entonces $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T) = \mathrm{Im}(\Phi)$ es un espacio vectorial.

Proposición 2.2. *En el caso que $x_0 = 0$, $B(\cdot) \equiv B$ es constante, y $r(\cdot) \equiv 0$, entonces*

$$\mathrm{Acc}(0, T_1) \subseteq \mathrm{Acc}(0, T_2) \qquad \forall 0 \leq T_1 \leq T_2.$$

Demostración. Sean $T_1 \leq T_2$, sea $x_1 \in \mathrm{Acc}(0, T_1)$, es decir, existe $u_1(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{aligned} x_1 &= X(T_1)x_0 + X(T_1)\int_0^{T_1} X(s)^{-1}(B(s)u_1(s))ds \\ &= X(T_1)\int_0^{T_1} X(s)^{-1}(B(s)u_1(s))ds \end{aligned}$$

Luego, tomamos

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, T_2 - T_1] \\ u_1(t - T_2 + T_1) & \text{si } t \in [T_2 - T_1, T_2] \end{cases}$$

Claramente $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Además, usando la fórmula de variación de parámetros (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned} x(T_2; x_0, u(\cdot)) &= X(T_2)\int_0^{T_2} X(s)^{-1}Bu(s)ds \\ &= X(T_2)\int_{T_2-T_1}^{T_2} X(s)^{-1}Bu_1(s - T_2 + T_1)ds. \end{aligned}$$

Luego, usando el cambio de variable $z = s - T_2 + T_1$ llegamos a:

$$x(T_2; x_0, u(\cdot)) = X(T_2)\int_0^{T_1} X(z + T_2 - T_1)^{-1}Bu_1(z)dz,$$

usando las propiedades de la resolvente llegamos a que lo anterior es

$$\begin{aligned} x(T_2; x_0, u(\cdot)) &= X(T_2)X(T_2 - T_1)^{-1}\int_0^{T_1} X(z)^{-1}Bu_1(z)dz \\ &= X(T_1)\int_0^{T_1} X(z)^{-1}Bu_1(z)dz = x_1. \end{aligned}$$

Es decir, este $u(\cdot)$ nos permite llegar en tiempo T_2 a x_1. Entonces, $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0, T_2)$. ■

Corolario 2.3. *Bajo las hipótesis del teorema anterior y suponiendo además que $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial,, $\mathrm{Acc}(x_0 = 0) := \bigcup_{T\geq 0} \mathrm{Acc}(0, T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.*

Volvamos al caso general, donde tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.4. *Si U es convexo entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0,\ T)$ es convexo.*

Demostración. Si U convexo, entonces $\mathcal{A}_U = L^\infty_{loc}(I;U)$ es convexo. Luego, dado (4.18) y la linealidad de Φ obtenemos que $\mathrm{Acc}_U(x_0,T)$ es convexo. ■

Sorprendentemente en el resultado anterior no es necesaria la convexidad de U. Para demostrar esto, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 2.5 (Lema de Lyapunov)**.** *Sea $T > 0$ y $f \in L^1([0,T];\mathbb{R}^n)$. Entonces, el siguiente conjunto es convexo:*

$$\left\{\int_A f(s)ds : A \subseteq [0,T] \text{ medible}\right\}$$

Demostración. Ver Apéndice **??**. ■

Teorema 2.6. *El conjunto $\mathrm{Acc}(x_0,T)$ es convexo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Acc}(x_0,T)$, $\lambda \in [0,1]$. Por definición, existen $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{A}$ tal que

$$x_i = x(T;x_0,u_i(\cdot)) = x_0^* + \Phi(u_i(\cdot)) = x_0^* + X(T)y_i \qquad i = 1,2.$$

Definimos

$$C := \left\{x_A = \begin{pmatrix} \int_A X(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds \\ \int_A X(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds \end{pmatrix} : A \subseteq [0,T] \text{ medible}\right\} \tag{2.6}$$

Por el lema de Lyapunov, C es convexo. Además, notemos que

$$x_{[0,T]} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad x_\emptyset = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como C es convexo entonces existe $A \subseteq [0,T]$ medible tal que $x_A = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C$.

De esto, concluimos que $x_A + x_{A^c} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y en consecuencia, $x_{A^c} = (1-\lambda)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Luego, definimos entonces

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{si } t \in A \\ u_2(t) & \text{si } t \in A^c \end{cases}$$

Claramente $u(\cdot) \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $x_0^* + \Phi(u(\cdot)) \in \mathrm{Acc}(x_0,T)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} x_0^* + \Phi(u(\cdot)) &= x_0^* + X(t)\int_0^T X(s)^{-1}B(s)u(s)ds \\ &= x_0^* + X(t)\left(\int_A X(s)^{-1}B(s)u_1(s)ds + \int_{A^c} X(s)^{-1}B(s)u_2(s)ds\right) \\ &= x_0^* + X(t)[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \end{aligned}$$

concluyendo que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathrm{Acc}(x_0,T)$, es decir, $\mathrm{Acc}(x_0,T)$ es convexo. ■

El sorprendente resultado anterior plantea naturalmente la siguiente interrogante:

Son los conjuntos $\mathrm{Acc}_U(x_0,T)$ y $\mathrm{Acc}_{co(U)}(x_0,T)$ iguales?

Aquí hemos denotado por $co(U)$ denota la envoltura convexa de U, es decir, al convexo más pequeño que contiene a U. Resolveremos esta interrogante y analizaremos sus consecuencias en la sección 2.4.

En lo que sigue, estudiaremos nuevas propiedades del conjunto de puntos accesibles.

Proposición 2.7. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si U simétrico (i.e., $a \in U \Leftrightarrow -a \in U$), $r(\cdot) \equiv 0$ y $x_0 = 0$, entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es simétrico.*

2. *Si U es compacto, entonces el conjunto $\mathrm{Acc}(x_0, T)$ varía continuamente con respecto a $T > 0$, es decir, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|T_1 - T_2| \leq \delta$, entonces $\mathrm{dist}(\mathrm{Acc}(x_0, T_1),\ \mathrm{Acc}(x_0, T_2)) \leq \epsilon$, donde, $\mathrm{dist}(A, B) := \max\{\sup_{y \in A} d(y, B),\ \sup_{y \in B} d(y, A)\}$.*

Demostración. El primer punto de la proposición es directo. En efecto, notamos que si $x_1 \in \mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es alcanzado gracias al control $-u(\cdot)$, entonces basta tomar su inverso aditivo $-u(\cdot)$ y usar (2.5) para concluir que $-x_1 \in \mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. El segundo punto, que no es directo como el anterior, queda como ejercicio propuesto para el lector. ■

En lo que sigue estudiaremos la compacidad del conjunto $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. Para esto tendremos que imponer la compacidad sobre el conjunto U y regularidad adicional sobre $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $r(\cdot)$.

Teorema 2.8. *Sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $A(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ y $r(\cdot) \in L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^n)$ y $U \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Entonces $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$ es un compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Acc}_U(x_0, T)$. Por definición y la fórmula de variación de parámetros (2.2), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n(\cdot) \in \mathcal{A}_U = L^\infty_{loc}([0, T]; U) \subseteq L^p_{loc}([0, T]; U)$ tal que:

$$x_n = x(T; x_0, u_n(\cdot)) = X(T)x_0 + X(T)\int_0^T X(s)^{-1}(B(s)u_n(s) + r(s))ds. \tag{2.7}$$

Luego, como U es compacto, la sucesión $\{u_n(\cdot)\}$ está contenida en un acotado de $L^p_{loc}([0, T]; U)$, para cualquier $p \in [1, +\infty]$. En virtud del teorema de Banach-Alaoglu (Ver C.3, Teorema 3.15, del libro de Rudin [Rud91]), obtenemos (pasando a subsucesiones si es necesario) que

$$u_n(\cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} u(\cdot) \text{ en } L^p([0, T]; U) \quad \text{(convergencia en la topología estrella débil)},$$

para algún $u(\cdot) \in L^p([0, T]; U)$. En particular, tomando $p = 2$ obtenemos $u_n(\cdot) \rightharpoonup u(\cdot)$ en $L^2([0, T]; U)$ (convergencia débil).

Adicionalmente, de (2.7) y del hecho que $\{u_n(\cdot)\}$ sean acotados en $L^p_{loc}([0, T]; U)$, deducimos que los x_n son acotados. Más aún, el mismo argumento para un $t \in [0, T]$ arbitrario (no necesariamente T) y usando que $\{u_n(\cdot)\}$ son acotados en $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$, obtenemos además que la sucesión $\{x_n(\cdot; x_0, u_n)\} =: \{x_n(\cdot)\}$ son acotados en $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$. Nuevamente por el teorema de Banach-Alaoglu, obtenemos que (pasando a subsucesiones si es necesario)

$$x_n(\cdot) \rightharpoonup x(\cdot) \text{ en } L^2([0, T], \mathbb{R}^n),$$

para cierto $x(\cdot) \in L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$. Así, dado que (2.1) nos dice que

$$\dot{x}_n(t) = A(t)x_n(t) + B(t)u_n(t), \quad t \in I \text{ c.t.p.},$$

se deduce que $\{\dot{x}_n(\cdot)\}$ es acotada en $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\{x_n(\cdot)\}$ es acotada en $H^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ (espacio cuyas funciones y derivadas están en $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$).

Como $H^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ está incluido compactamente en $L^2([0,T];\mathbb{R}^n)$ (Ver, por ejemplo, Teorema 1 de la Sección C.5.7 del libro de Evans [Eva10]), entonces concluimos que $x_n(\cdot) \to x(\cdot)$ en $L^2([0,T])$. Notando ahora que el lado derecho de (2.7) se puede escribir como:

$$x_0^* + \langle X(T)X(s)^{-1}B(s), u_n(s)\rangle_{L^2([0,T],\mathbb{R}^m)}$$

donde x_0^* fue definido en (2.3), de la convergencia $u_n(\cdot) \rightharpoonup u(\cdot)$ en L^2, se obtiene que

$$x(\cdot) = x(\cdot;x_0,u(\cdot)) = X(\cdot)x_0 + X(\cdot)\int_0^{\cdot} X(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

Finalmente, usando el hecho de que $x(\cdot)$ es continua en $[0,T]$ y de la recíproca del teorema de convergencia dominada, concluimos que $x_n \to x(T) = x(T;x_0,u(\cdot)) \in \mathrm{Acc}_U(x_0,T)$. ■

En lo que sigue formalizaremos el concepto de controlabilidad. Considerando el conjunto de puntos accesibles $\mathrm{Acc}(x_0,T)$, nos interesara conocer cuando podemos llevar el sistema controlado a cualquier punto de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.9. *Diremos que el sistema* (2.1) *es controlable desde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en un tiempo $T > 0$ si $Acc(x_0,T) = \mathbb{R}^n$. También introduciremos las siguientes variantes:*

- *El sistema* (2.1) *es controlable en un tiempo $T > 0$ si $\cap_{x_0\in\mathbb{R}^n} Acc(x_0,T) = \mathbb{R}^n$.*
- *El sistema* (2.1) *es controlable si $\cap_{T>0}\cap_{x_0\in\mathbb{R}^n} Acc(x_0,T) = \mathbb{R}^n$.*

En las próximas secciones caracterizaremos estas definiciones para distintos tipos de controles. Para terminar estas sección, veremos un lema técnico que será de utilidad en las próximas secciones.

Lema 2.10. *El sistema* (2.1) *es controlable en un $T > 0$ si y solo si la función $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$u(\cdot) \mapsto \Phi(u(\cdot)) = X(T)\int_0^T X(s)^{-1}B(s)u(s)ds$$

es sobreyectiva.

Demostración. Supongamos que el sistema (2.1) es controlable en un tiempo $T > 0$ y mostremos que Φ es sobreyectiva. Notemos que para la condición inicial

$$\hat{x}_0 = -X(T)^{-1}\int_0^T X(T)X(s)^{-1}r(s)ds = \int_0^T X(s)^{-1}r(s)ds,$$

de la fórmula de variación de parámetros (2.2) se obtiene que $x(T;\hat{x}_0,u(\cdot)) = \Phi(u(\cdot))$ para todo control $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Concluimos entonces que $\Phi(\mathcal{A}) = \mathrm{Acc}(\hat{x}_0,T) = \mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, tenemos que

$$\mathrm{Acc}(x_0,T) = x_0^* + \Phi(\mathcal{A}),$$

con x_0^* definido en (2.3) para $t = T$. Luego, si $\Phi(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n$ esto implica $\mathrm{Acc}(x_0,T) = \mathbb{R}^n$. ■

2.1 Sistemas lineales autónomos sin restricciones en el control

En esta sección estudiaremos la controlabilidad en el caso que con controles no acotados, i.e., $U = \mathbb{R}^m$ (es decir, $u(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^m)$) y cuando el sistema es autónomo, es decir, cuando $A(\cdot) \equiv A$, $B(\cdot) \equiv B$, $r(\cdot) \equiv 0$ (es decir, los datos son independientes del tiempo). Procederemos a mostrar uno de los resultados principales de este capítulo, el criterio de controlabilidad de Kalman.

Teorema 2.11. *El sistema* (2.1) *es controlable en un tiempo* $T > 0$ *si y solo si la matriz de Kalman* $K \in \mathbb{R}^{n \times nm}$*, definida como sigue:*

$$K = [B|AB|A^2B|\ldots|A^{n-1}B],$$

tiene rango completo.

Demostración. Gracias al lema 2.10, basta mostrar que K no tiene rango completo si y sólo si $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva. Supongamos que rango$(K) < n$, es decir, que existe un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $v^\top K = 0$ (ya que las n filas de K son linealmente dependientes). De esto deducimos que $v^\top B = 0$ y que $v^\top A^k B = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. El teorema de Cayley-Hamilton (Ver C.7, Teorema 7.2, del libro de Bronson [Bro08]) nos dice que

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0,$$

donde $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el polinomio característico de la matriz A, con a_i, $i = 0, \ldots, n-1$, sus coeficientes. Multiplicando la expresión anterior por la izquierda por el vector $v^\top$, por la derecha por B, gracias a la observación anterior podemos concluir que

$$v^\top A^n B + a_{n-1} v^\top A^{n-1} B + a_1 v^\top AB + a_0 v^\top B = v^\top A^n B = 0.$$

Si multiplicamos $p_A(A)$ por A, y seguimos este procedimiento inductivamente obtenemos que $v^\top A^k B = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto nos lleva a que por definición $v^\top e^{sA} B = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, donde e^A la matriz exponencial. Como en este caso, la resolvente viene dada por $X(s) = e^{sA}$, se obtiene

$$v^\top \Phi(u(\cdot)) = v^\top \int_0^T e^{(T-s)A} B u(\cdot) ds = 0, \text{ para todo } u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Lo anterior quiere decir que $v \in \operatorname{Im}(\Phi)^\perp$, con $v \neq 0$, lo que implica que $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva,

Para la otra implicancia, si $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva, por el teorema del núcleo-imágen (ver, por ejemplo, Teorema 2.3 del capítulo C.2 del libro de Friedberg [Fri10]), deducimos que $\dim(\operatorname{Im}(\Phi)^\perp) = \dim(\operatorname{Ker} \Phi) \geq 1$. De esto obtenemos la existencia de un $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que:

$$v^\top \Phi(u(\cdot)) = \int_0^T v^\top e^{(T-s)A} B u(s) ds = 0, \text{ para todo } u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Por argumento de localización en $u(\cdot)$, deducimos que $v^\top e^{sA} B = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Evaluando en $s = 0$ obtenemos $v^\top B = 0$. Derivando la expresión anterior y evaluando nuevamente en $s = 0$ obtenemos $v^\top AB = 0$. Inductivamente obtenemos que $v^\top A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero entonces $v^\top K = 0$ para $v \neq 0$, lo que quiere decir que rango$(K) < n$. ■

Hemos demostrado que el sistema es controlable en $T > 0$ si y solo si existe la matriz K tiene rango completo. Notemos que en esta última condición, conocida como el criterio de Kalman, no depende del tiempo T. Lo anterior asegura entonces la controlabilidad para todo tiempo T positivo. Esto nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.12. *En un sistema autónomo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El sistema* (2.1) *satisface el criterio de controlabilidad de Kalman.*
2. *El sistema* (2.1) *es controlable en* $T > 0$.
3. *El sistema* (2.1) *es controlable.*

2.2 Sistemas lineales no autónomos sin restricción sobre el control

Consideremos el sistema lineal (2.1) introducido anteriormente con $u(\cdot) \in \mathcal{A} = L^{\infty}_{loc}(I; \mathbb{R}^n)$. El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para este caso y una cierta analogía con el criterio de Kalman.

Teorema 2.13. *El sistema dado por* (2.1) *es controlable en un tiempo* $T > 0$ *sí y solo sí el Gramiano (o matriz Gramiana) asociado a* (2.1)

$$G(T) := \int_0^T X^{-1}(s)B(s)B^{\top}(s)X^{-\top}(s)ds \tag{2.8}$$

es invertible.

Demostración. Demostremos el teorema por doble implicancia.

($\Longleftarrow$) De la fórmula de variación de parámetros (2.2) tenemos que

$$x(T; x_0, u(\cdot)) = x_0^* + X(T) \int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds.$$

Notemos que si tomamos $u(s) = B^{\top}(s)X^{-\top}(s)\xi_0$ con $B(s), X^{-1}(s) \in L^{\infty}_{loc}$ (en los espacios correspondientes= y $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Así, nos queda el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x(T; x_0, u(\cdot)) = x_0^* + X(T)G(T)\xi_0 \\ u(\cdot) \in \mathcal{A} \end{cases} \tag{2.9}$$

Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como por hipótesis $G(T)$ es invertible, podemos tomar $\xi_0 = G(T)^{-1}X^{-1}(T)(\tilde{x} - x_0^*)$, con lo que remplazando en (2.9) se obtiene que $x(T) = \tilde{x}$, por lo tanto (1) es controlable.

($\Longrightarrow$) Razonando por contra-recíproca supongamos que $G(T)$ no es invertible. Como $G(T)$ es simétrica semidefinida positiva, entonces necesariamente existe $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tal que

$$v^{\top}G(T)v = \int_0^T \|B^{\top}(s)X^{-\top}(s)v\|^2 ds = 0$$

Por lo que

$$v^{\top}X^{-1}(s)B(s) = 0 \quad \text{para todo } s \in [0, T] \text{ c.t.p.}$$

Con lo que integrando sobre s se obtiene que

$$v^\top \int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

Ahora, para $\hat{v} := X^{-\top}(T)v$, lo anterior equivale a que

$$\hat{v}^\top \Phi(u(\cdot)) = \hat{v}^\top X(T) \int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A},$$

con $\Phi(\cdot)$ función lineal definida en (2.4).

Utilizando la fórmula de variación de parámetros (2.2) y lo anterior, se concluye que

$$\hat{v}^\top (x(T; x_0, u(\cdot) - x_0^*)) = 0, \qquad \forall u(\cdot) \in \mathcal{A},$$

es decir, se concluye que $Acc(x_0, T)$ está contenido en el hiperplano afín $x_0^* + \{\hat{v}\}^\perp$, el cual es subconjunto estricto de $I\!R^n$, y por lo tanto el sistema en estudio no es controlable. ■

Observación 2.14. *Notemos que en el caso autónomo $G(T)$ es invertible equivale a que se cumple la condición de Kalman. En efecto, recordando la expresión de la resolvente, que $G(T)$ no sea invertible equivale a que existe un $v \neq 0$ tal que $v^\top e^{sA}B = 0$ para todo s. Así*

$$\exists\ v \neq 0\ :\ v^T A^k B = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

Pero esto último, según lo visto en la demostración del Teorema 2.11, equivale justamente a que no se cumple la condición de Kalman.

Dado lo discutido hasta ahora, resulta conveniente caracterizar los puntos desde los cuales podemos controlar nuestra variable de estado para que llegue a un conjunto en determinado tiempo.

Definición 2.15. *Sean $T > 0$ y $\mathcal{T} \subseteq I\!R^n$ el conjunto objetivo, definimos el conjunto de puntos controlables a $\mathcal{T}$ en un tiempo T como*

$$\mathcal{C}_\mathcal{T}(T) := \{x_0 \in I\!R |\ \exists\ u(\cdot) \in \mathcal{A}\ :\ x(T; x_0, u(\cdot)) \in \mathcal{T}\}$$

Luego, definimos el conjunto de puntos controlables de $\mathcal{T}$ para algún tiempo como

$$\mathcal{C}_\mathcal{T} := \cup_{T \geq 0} \mathcal{C}_\mathcal{T}(T)$$

Notación 2.16. *En el caso que $\mathcal{T} = \{0\}$, se denotará a los conjuntos recién definidos por*

$$\mathcal{C}(T) := \mathcal{C}_\mathcal{T}(T) \quad \text{ y } \quad \mathcal{C} := \mathcal{C}_\mathcal{T},$$

y se adoptará la convención $\mathcal{C}(0) = \{0\}$.

Definición 2.17. *Diremos que el sistema lineal* (2.1) *es controlable a $\mathcal{T}$ (o al origen) en un tiempo $T > 0$ si $\mathcal{C}_\mathcal{T}(T) = I\!R^n$ (o $\mathcal{C}(T) = I\!R^n$).*

Ejemplo 2.18. *Consideremos el sistema lineal siguiente:*

$$\dot{x} = -x + u\ ,\ \mathcal{T} = \{0\},\ U = [-1, 1]$$

En este caso tenemos que $Acc(x_0 = 0, T) = [e^{-T} - 1, 1 - e^{-T}]$ y $\mathcal{C}(T) = [-e^T + 1, e^T - 1]$.

Observación 2.19. *Notemos que si $r(\cdot) \equiv 0$, usando la fórmula de variación de parámetro se tiene de forma directa que $x_0 \in \mathcal{C}(T)$ sí y solo sí $x_0 = -\int_0^T X^{-1}(s)B(s)u(s)ds$ para cierto $u(\cdot) \in \mathcal{A}$.*

Gracias a la observación anterior, de manera directa se obtienen las siguientes propiedades básicas sobre el conjunto $\mathcal{C}(T)$.

Proposición 2.20. *Para el caso $r(\cdot) \equiv 0$, se tiene que:*

- *Si U es convexo, entonces $\mathcal{C}(T)$ es convexo.*
- *Si U es simétrico, entonces $\mathcal{C}(T)$ es simétrico.*
- *$\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{C}(\tilde{T})$ para todo T, $\tilde{T}$ tal que $0 < T \leq \tilde{T}$.*
- *Si U es convexo (resp. simétrico), entonces $\mathcal{C}$ es convexo (resp. simétrico).*

Esta simetría entre $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T)$ y $\mathcal{C}(T)$ se puede formalizar en el caso autónomo mediante la dinámica inversa de (2.1). En efecto, como es usual denotemos

$$x(\cdot) := x(\cdot, x_0 = 0, u(\cdot))$$

para cierto $u(\cdot) \in \mathcal{A}$. Así, para las traslaciones $\tilde{x}(\xi) := x(T - \xi)$, $\tilde{u}(\xi) := u(T - \xi)$, obtenemos el siguiente sistema inverso:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(\xi) = -\dot{x}(T - \xi) = -Ax(T - \xi) - B\tilde{u}(\xi) \\ \tilde{x}(0) = x(T) \quad ; \quad \tilde{x}(T) = x_0 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Así, obtenemos que $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0 = 0, T)$ (para el sistema (2.1)) sí y solo sí $x_1 \in \mathcal{C}(T)$ del sistema (2.10). En particular, hemos obtenido que (2.1) es controlable en T sí y solo sí (2.10) es controlable a 0 en un tiempo T. De la misma forma se deduce que (2.1) es controlable a 0 en un tiempo T sí y solo sí (su sistema inverso) (2.10) es controlable en T.

Notemos ahora que, para el caso $U = \mathbb{R}^m$, (2.1) es controlable sí y solo sí su sistema inverso (2.10) es controlable, esto debido a que sus matrices de Kalman coinciden. Más aún, la condición de Kalman no depende del punto inicial $x_0 = 0$ ni del tiempo T, por lo que en este caso controlabilidad equivale a la contrabilidad a 0 desde cualquier tiempo T.

A manera de resumen, se ha logrado la equivalencia de las siguientes proposiciones para el caso autónomo para un $T > 0$ dado:

(1) $\mathrm{Acc}(x_0 = 0, T) = \mathbb{R}^n$

(2) $\mathcal{C}(T) = \mathbb{R}^n$

(3) Se cumple el criterio de Kalman cuando $U = \mathbb{R}^m$

(4) El sistema es controlable (para cualquier tiempo) cuando $U = \mathbb{R}^m$

(5) El sistema es controlable a 0 para cualquier tiempo cuando $U = \mathbb{R}^m$

2.3 Sistemas lineales autónomos con restricciones en el control

En esta sección estudiaremos la controlabilidad a 0 en el caso el caso autónomo, es decir, el sistema (2.1) cuando $A(\cdot) \equiv A$, $B(\cdot) \equiv B$, $r(\cdot) \equiv 0$ (es decir, los datos son independientes del tiempo), y con controles acotados en conjuntos tipo "caja". Por simplicidad, consideraremos $U = [-1,1]^m$, pero los resultados mostrados en esta sección son ciertos también si consideramos un conjunto U convexo y simétrico, tal que $0 \in \operatorname{int} U$.

Teorema 2.21. *La condición de Kalman se satisface si y sólo si existe un tiempo $T > 0$ tal que $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(T))$.*

Demostración. Razonaremos por contrarecíproca.

Gracias al teorema de separación de Hahn-Banach, $0 \notin \operatorname{int} \mathcal{C}(T)$ si y sólo si existe $v \neq 0$ tal que para todo $x_0 \in \mathcal{C}(T)$ se tiene que $v^\top x_0 \leq 0$. Como $\mathcal{C}(T)$ es simétrico, lo anterior equivale a $v^\top x_0 = 0$ para todo $x_0 \in \mathcal{C}(T)$. Mediante la fórmula de variación de parámetros (2.2), se obtiene que lo anterior equivale a que $v^\top \Phi(\mathcal{A}) = 0$. Finalmente, como lo anterior implica que $\Phi(\cdot)$ no es sobreyectiva. Se concluye entonces, a partir del Lemma 2.10, que la condición de Kalman no se satisface.

Para la recíproca, si la condición de Kalman no se satisface, siguiendo los mismos argumentos dados en la demostración del Teorema 2.11, se deduce que $v^\top \Phi(\mathcal{A}) = 0$. Concluyendo el resultado deseado a partir de las equivalencias expuestas en el párrafo anterior. ■

Observación 2.22. *Dado que $\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{C}(\tilde{T})$ para todo $T \leq \tilde{T}$, cuando $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(T))$, se tiene que $0 \in \operatorname{int}(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ para todo $\tilde{T} \geq T$.*

Una consecuencia directa de lo anterior permite establecer condiciones que aseguren la controlabilidad a 0 en este caso particular.

Teorema 2.23. *Si la versión autónoma del sistema (2.1), con $U = [-1,1]^m$, satisface la condición de Kalman y cumple además que los valores propios de la matrix A tienen todos parte real estrictamente negativa, entonces el sistema (2.1) es controlable a 0.*

Demostración. Basta recordar que si los valores propios de la matrix A tienen parte real estrictamente negativa entonces el sistema homogeneo $\dot{x}(\cdot) = Ax(\cdot)$ es globalmente asintóticamente estable y luego aplicar el Teorema 2.21. ■

Observación 2.24. *Este resultado también es cierto si los valores propios de la matrix A tienen parte real menores o igual que 0, sin embargo, en este caso el control debe ser* monoentrada*, i.e., $m = 1$.*

Ejemplo 2.25 (Resorte Amortiguado)**.** *Consideremos la siguiente ecuación*

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \qquad (k > 0,\ c \in \mathbb{R})$$

Llevándolo a la forma (2.1) (usando el cambio de variable $y = \dot{x}$)

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + Bu \qquad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (r(\cdot) = 0)$$

Calculamos entonces la matriz de Kalman y tenemos el resultado correspondiente:

$$K = (B|AB) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{array} \right)$$

el cual tiene rango 2, por lo que se satisface Kalman. Esto último implica particularmente que el sistema del resorte es controlable si $U = \mathbb{R}^m$. *Si ahora* $U = [-1, 1]$ *necesitamos además que se satisface la condición* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *para todo* λ *valor propio de* A. *Analizaremos entonces la traza y el determinante de* A:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(A) = -c, \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = k > 0.$$

Esto en particular quiere decir que $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *para todo* λ *valor propio de* A *si y sólo si* $c \geq 0$. *Por lo tanto, el sistema es controlable si es que* $c \geq 0$.

2.4 Principio del Bang-Bang

En esta sección introduciremos una clase particular de controles admisibles con fuertes implicancias prácticas y teóricas.

Definición 2.26. *Para controles con valores en* $U = [-1, 1]^m$ *un control* $u(\cdot)$ *admisible se dirá de tipo* Bang-Bang *en* $[0, T]$ *si para todo* $i = 1, \ldots, m$ *se tiene que* $|u_i(t)| = 1$ *para* $t \in [0, T]$ *c.t.p.*

Presentamos el teorema que justificará la existencia de un control del tipo Bang-Bang que nos permita ir desde cualquier punto inicial al origen en un tiempo T.

Teorema 2.27. *Sean* $T > 0$ *y* $x_0 \in \mathcal{C}(T)$, *y consideremos la dinámica lineal* (2.1) *autónoma con controles tipo caja* $U = [-1, 1]^m$. *Entonces, existe un control tipo Bang-Bang que lleva* x_0 *a* 0 *en tiempo* T.

Demostración. Definamos el conjunto

$$\mathcal{K} = K(x_0, T) := \{u(\cdot)|_{[0,T]} : u(\cdot) \in \mathcal{A} \text{ y } x(T, x_0, u(\cdot)) = 0\}.$$

Así, $u(\cdot) \in \mathcal{K}$ si y sólo si $x_0 \in \mathcal{C}(T)$. En esta demostración mostraremos que $\mathcal{K}$ tiene puntos extremos y que estos coinciden con los controles tipo Bang-Bang.

La existencia de puntos extremos de $\mathcal{K}$ será consecuencia del *Teorema de Krein-Milman* (Ver el Capítulo 3, Teorema 3.65, del libro de Fabian [FHH$^+$11]), para lo cual necesitamos demostrar que $\mathcal{K}$ es convexo y compacto débil-$*$ en $L^\infty(I, \mathbb{R}^m)$. Veamos primero la convexidad. Sean $\lambda \in (0, 1)$ y $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in K$. Como hemos visto, de la fórmula de variación de parámetros (2.2) sabemos $u(\cdot) \in \mathcal{K}$ equivale a decir que $x_0 = -\int_0^T e^{-sA} Bu(s)ds$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T e^{-sA} B(\lambda u_1(s) + (1-\lambda)u_2(s))ds &= -\left[\lambda \int_0^T e^{-sA} Bu_1(s)ds + (1-\lambda) \int_0^T e^{-sA} Bu_2(s)ds\right] \\ &= \lambda \cdot x_0 + (1-\lambda)x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier combinación convexa de elementos en $\mathcal{K}$ pertenece al conjunto. Esto quiere decir que $\mathcal{K}$ es convexo.

Ahora, procedamos a mostrar la compacidad débil-$*$ de $\mathcal{K}$ mediante su caracterización secuencial. Sea $\{u_n(\cdot)\}$ una sucesión de controles en $\mathcal{K}$, que es por definición un subconjunto de $L^\infty([0,T];U)$. Luego, por el teorema de Banach-Alaoglu, existe una subsucesión convergente, que sin pérdida de generalidad seguiremos llamando $\{u_n(\cdot)\}$, tal que $u_n \to \tilde{u}(\cdot)$ para cierto $\tilde{u}(\cdot) \in L^\infty([0,T];U)$. Así, obtenemos

$$x_0 = -\int_0^T e^{-sA}Bu_n(s)ds \to x_0 = -\int_0^T e^{-sA}B\tilde{u}(s)ds.$$

Con esto, se concluye que $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{K}$, y por lo tanto $\mathcal{K}$ es compacto para la topología débil-$*$.

Para concluir, mediante un argumento de introducción, mostraremos que los puntos extremos de $\mathcal{K}$ son los controles de tipo Bang-Bang. Supongamos entonces que existe $u^*(\cdot)$ punto extremo de $\mathcal{K}$ que no es Bang-Bang, es decir, para alguna de sus coordenadas existe un subconjunto del intervalo I de medida no nula, en el cual el valor absoluto del control es *estrictamente* menor a 1. Esto escrito usando cuantificadores se plantea como sigue:

$$\exists i \in \{1,\dots,m\}, \exists \varepsilon > 0, \exists F \subseteq [0,T],\ \mu(F) > 0,\ \forall t \in F\ :\ |u_i^*(t)| < 1-\varepsilon,$$

donde $\mu(\cdot)$ es la medida de Lebesgue en $I\!R$.

Sea $\beta(\cdot) \in L^\infty([0,T];I\!R)$. Definimos $I_F(\beta(\cdot)) := \int_F e^{-sA}B\beta(s)e_i ds$, una herramienta que nos será útil más adelante. En particular, tomemos un $\beta(\cdot)$ que cumpla $\beta(\cdot)|_F \not\equiv 0$ y $\beta(\cdot)|_{F^c} \equiv 0$ (es decir, que sea nula fuera de F), $|\beta(t)| \leq 1\ \forall t \in F$ y $I_F(\beta(\cdot)) = 0$. Se justificará la existencia de tal $\beta(\cdot)$ al final de esta demostración.

Definimos $u_\pm(\cdot) := u^*(\cdot) \pm \varepsilon\beta(\cdot)e_i$. Tenemos que $u_\pm \in \mathcal{K}$ ya que:

$$-\int_0^T e^{-sA}Bu_\pm(s)ds = x_0 \pm \varepsilon I_F(\beta(\cdot)) = x_0 \pm 0 = x_0$$

Sumado a esto,

$$|(u_\pm)_i(t)| = |u_i^*(t) \pm \varepsilon\beta(t)| \leq |u_i^*(t)| + |\varepsilon\beta(t)| < (1+\varepsilon) + \varepsilon < 1$$

Sin embargo, $u^*(\cdot) = \frac{1}{2}u_+(\cdot) + \frac{1}{2}u_-(\cdot)$, lo que contradice el hecho de que $u^*(\cdot)$ sea punto extremo de $\mathcal{K}$.

Ahora, para finalizar, justificaremos la existencia de la función $\beta(\cdot)$ mencionada anteriormente. Sean $p > m$ y $\beta_1(\cdot),\dots,\beta_p(\cdot)$ funciones dadas en $L^\infty([0,T];I\!R)$ que satisfacen que $I_F(\beta_i(\cdot)) \neq 0$ para todo i, y definamos la función:

$$\hat{I}_F : I\!R^p \to I\!R^m; \quad \alpha \to \hat{I}_F(\alpha) = \sum_{j=1}^p \alpha_i I_F(\beta_j(\cdot))$$

Por el Teorema del Núcleo-Imagen (ver Capítulo 3, Teorema 3.2 en [Lan12]):

$$p = \dim(\mathrm{Ker}(\hat{I}_F)) + \dim(\mathrm{Im}(\hat{I}_F)).$$

Como $\dim(\mathrm{Im}(\hat{I}_F)) \leq m$ obtenemos que $\dim(\mathrm{Ker}(\hat{I}_F)) \geq p - m \geq 1$. Por lo que existe $\alpha^* \neq 0$ tal que $\hat{I}_F(\alpha^*) = 0$. Luego, para $\beta^*(\cdot) := \sum_j \alpha_j^* \beta_j(\cdot)$, que está en $\in L^\infty([0,T]; I\!R)$, se tiene $I_F(\beta^*(\cdot)) = 0$. Hemos así construido de manera explícita la siguiente función $\hat{\beta}(\cdot)$, dada por

$$\hat{\beta}(s) := \frac{\beta^*(s)(1 - \mathbf{1}_{F^c}(s))}{||\beta^*(\cdot)(1 - \mathbf{1}_{F^c}(\cdot))||}, \qquad \text{para todo } s \in I,$$

que cumple con las condiciones requeridas. Acá, hemos denotado por $\mathbf{1}_\Omega(\cdot)$ la función indicatriz, que vale 1 si se está en el conjunto Ω y 0 si no. ■

CAPÍTULO 3

Observabilidad, estabilización, detectabilidad y compensadores

En este capítulo estudiaremos por separado distintas nociones asociadas a la ecuación lineal controlada (1.1). La primera da cuenta de la observabilidad de un sistema controlado.

3.1 Observabilidad

En muchas aplicaciones no es posible medir el estado del sistema, solo se puede observar una función del mismo. Acorde a la linealidad del sistema (1.1) se asumirá que esta función es también lineal. Así, en esta sección, consideramos el sistema controlado-observado:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \text{ c.t.p. } t \in [0,T]; \quad x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.2}$$

con $C \in I\!R^{p\times n}$ (típicamente p es menor a n). Una representación grafica de este fenómeno es

$$u(\cdot) \to \boxed{(3.1) - (3.2)} \to y(\cdot)$$

Definición 3.1. *El sistema* (3.1)-(3.2) *se dirá* observable en $[0,T]$ *si para todo par* x_1, x_2 *en* $I\!R^n$ *distintos existe un control* $u(\cdot)$ *en* $L^\infty([0,T];U)$ *tal que* $y(\cdot;x_1,u(\cdot)) \neq y(\cdot;x_2,u(\cdot))$ *en* $[0,T]$.

Notemos que equivalentemente el sistema (3.1)-(3.2) es observable en $[0,T]$ si y solo si para todo par x_1, x_2 en $I\!R^n$ y para todo control $u(\cdot)$ en $L^\infty([0,T];U)$ se tiene que $y(\cdot;x_1,u(\cdot)) \equiv y(\cdot;x_2,u(\cdot))$ en $[0,T]$ implica que x_1 y x_2 son iguales.

Lema 3.2. *El sistema* (3.1)-(3.2) *es observable en* $[0,T]$ *si y solo si el sistema homogéneo dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_H(t) &= A(t)x_H(t) \quad t \in [0,T]; \quad x(0) = x_0 \\ y_H(t) &= Cx_H(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

es observable en el siguiente sentido: si $x_0 \neq 0$ *entonces* $y_H(\cdot) \neq 0$ *en* $[0,T]$.

Demostración. De la definición 3.1 el sistema (3.1)-(3.2) es observable si y solo si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 en $\mathbb{R}^n$ existe un control $u(\cdot) \in L^\infty([0,T];U)$ que da origen a soluciones distintas, esto es $y(\cdot;x_1,u(\cdot)) \neq y(\cdot;x_2,u(\cdot))$ en $[0,T]$. Usamos la Fórmula de Variación de Parámetros (2.2) para ver que lo anterior es equivalente a decir que para todo x_1 y x_2 en $\mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$ implica que existe un control admisible $u(\cdot)$ tal que

$$\begin{aligned} &C(X(t)x_1 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}(B(s)u(s)+r(s))\mathrm{d}s) \neq \\ &C(X(t)x_2 + X(t)\int_0^t X(s)^{-1}(B(s)u(s)+r(s))\mathrm{d}s) \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

Así, definiendo $x_0 = x_1 - x_2$ y restando la ecuación anterior se llega a que el sistema (3.1)-(3.2) es observable si y solo si $x_0 \neq 0$ implica que $CX(t)x_0 \neq 0$ para todo $t \in [0,T]$.

Para finalizar, basta notar que $X(t)x_0$ es justamente la solución del sistema homogéneo correspondiente a la primera ecuación en el sistema homogéneo (3.3), y por lo tanto $y_H(t) = CX(t)x_0$. ■

Si bien la definición de observabilidad es válida para sistemas controlados-observados generales, nuestros resultados serán vistos sólo para el caso autónomo y sin restricciones sobre el control, es decir, cuando $A(\cdot) \equiv A$, $B(\cdot) \equiv B$, $r(\cdot) \equiv 0$ y $U = \mathbb{R}^m$ (es decir, $u(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(I;\mathbb{R}^m)$). En este contexto el sistema (3.1)-(3.2) se denotará de manera concisa como (A,B,C), mientras que el sistema homogéneo (3.3) se denotará (A,C).

Lo anterior y el lema 3.2 permite establecer una equivalencia "dual" entre la observabilidad con la controlabilidad.

Teorema 3.3. *El sistema autónomo (A,B,C) es observable en $[0,T]$ si y solo si el sistema*

$$\dot{z}(t) = A^\top z(t) + C^\top v(t), \qquad (A^\top, C^\top)$$

con $v(\cdot)$ en $L^\infty([0,T];\mathbb{R}^p)$, es controlable en $[0,T]$.

Demostración. Por el lema 3.2 el sistema (A,B,C) no es observable si y solo si existe un $x_0 \neq 0$ tal que

$$y_H(t;x_0) = Cx_H(t;x_0) = C\mathrm{e}^{tA}x_0 = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.4}$$

donde usamos que es autónomo para escribir $x_H(t;x_0) = \mathrm{e}^{tA}x_0$.

Luego, demostraremos el teorema vía dos contrarecíprocas. Primero, derivando con respecto a t en la ecuación (3.4) y evaluando en 0 se llega a

$$CA^k x_0 = 0 \quad \forall k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{3.5}$$

Tomando traspuesta y expresando en forma matricial obtenemos:

$$x_0^\top (C^\top \vdots A^\top C^\top \vdots \ldots \vdots (A^{n-1})^\top C^\top) = x_0^\top \tilde{K} = 0 \tag{3.6}$$

donde $\tilde{K}$ es la matriz de Kalman del sistema $(A^\top, C^\top)$. Hemos llegado así que la repsectiva matriz de Kalman no es de rango completo p, y por lo tanto el sistema $(A^\top, C^\top)$ no es controlable.

Recíprocamente, sabemos que si $\tilde{K}$ es de rango incompleto entonces existe $x_0 \neq 0$ tal que $x_0^\top \tilde{K} = 0$. Si se traspone la ecuación llegamos a que

$$Cx_0 = CAx_0 = \cdots = CA^{n-1}x_0 = 0 \tag{3.7}$$

y, como hemos analizado antes, por el teorema de Cayley-Hamilton (Teorema 7.2 del capítulo 7 del libro de Bronson [Bro08]) sigue que

$$C\mathrm{e}^{tA}x_0 = 0 \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.8}$$

Concluimos que el sistema (A, B, C) no es observable. ■

En la demostración anterior se usó la matriz $\tilde{K}$ que resulta muy útil al momento de caracterizar la observabilidad de un sistema. Su traspuestas es entonces un concepto clave que se formaliza a continuación.

Definición 3.4. *Se define la* matriz de observabilidad *del sistema* (A, B, C) *como* $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{np\times n}$ *dada por*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

De la definición anterior es claro que el rango de $\tilde{K}$ es completo (e igual a p) si y solo si la matriz de observabilidad de (A, C) es de rango completo.

Teniendo en mente los resultados obtenidos hasta ahora, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.5. *Las siguientes nociones son equivalentes:*

1. (A, B, C) *es observable.*
2. (A, C) *es observable.*
3. $(A^\top, C^\top)$ *es controlable.*
4. $\mathcal{O}$ *es de rango completo.*
5. *El Gramiano del sistema* $(A^\top, C^\top)$, $O(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{-sA^\top} C^\top C \mathrm{e}^{-sA} \mathrm{d}s$ *es invertible.*
6. *La matriz* $\tilde{O}(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{sA^\top} C^\top C \mathrm{e}^{sA} \mathrm{d}s$ *es invertible.*

Demostración. Por el lema 3.2 sabemos que la observabilidad del sistema (A, B, C) es equivalente a la observabilidad del sistema homogéneo (A, C), y por el teorema 3.3 el sistema (A, C) es observable si y solo si el sistema $(A^\top, C^\top)$ es controlable. Como estamos en el caso autónomo, del teorema 2.11 sigue que $(A^\top, C^\top)$ es controlable si y solo si cumple con el criterio de Kalman, y de la observación 2.14 lo anterior equivale a que el Gramiano del sistema sea invertible. Para concluir basta repetir la demostración del teorema 2.13 usando $\tilde{O}(T)$ en vez del Gramiano, esto es, reemplazar la variable de integración s por $-s$ en la ecuación (2.8) y proceder de igual manera. ■

Para ilustrar la noción de observabilidad veremos un ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Consideramos el resorte amortiguado modelado por el sistema $\ddot{x}+c\dot{x}+kx = u$, con $k \in (0,\infty), c \in I\!R$ y $U = I\!R$. Lo escribimos en forma matricial como*

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{3.9}$$

y llamamos A a la matriz que acompaña a $(x_1, x_2)^\top$. Para a y b reales definimos $C := (a, b)$ y la observación viene dada por:

$$y(t) = C \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = (a, b) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_(t) \end{pmatrix} = ax_1(t) + bx_2(t) \tag{3.10}$$

Calculamos la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ -bk & a - bc \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

y vemos que es de rango 2 si y solo si no existe $\alpha \neq 0$ tal que $a = -\alpha bk$ y $b = \alpha(a-bc)$. Para que esto suceda es condición suficiente es que solo se observe o la posición (x) o la velocidad ($\dot{x}$), esto es: $a \neq 0$ y $b = 0$ o $a = 0$ y $b \neq 0$.

3.2 Problema de observabilidad

El problema de observabilidad se define así: Dados $u(\cdot), y(\cdot)$ (en $[0,T]$) y las matrices A, B, C buscamos encontrar $x(\cdot)$ (en $[0,T]$). Notar que esto es equivalente a decir que sólo el punto inicial x_0 es desconocido. Para esto, definimos un sistema auxiliar

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t); \qquad \bar{x}(0) = 0 \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \end{cases}$$

donde todos los parámetros son conocidos. A continuación se definen las variables $\tilde{x}(\cdot) = x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)$, que es desconocido, e $\tilde{y}(\cdot) = y(\cdot) - \bar{y}(\cdot)$, que sí se conoce. Estas variables obedecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\bar{x}} = A(x - \bar{x}) = A\tilde{x}; \qquad \tilde{x}(0) = x_0 \\ \tilde{y} = y - \bar{y} = Cx - C\bar{x} = C\tilde{x} \end{cases}$$

De la Fórmula de Variación de Parámetros (2.2) obtenemos $\tilde{y}(s) = C\tilde{x}(s) = C\mathrm{e}^{sA}x_0$. Multiplicamos por la izquierda por $\mathrm{e}^{sA^\top}C^\top$ y luego integramos en el intervalo $[0,T]$ en ambos lados, llegando a

$$\int_0^T \mathrm{e}^{sA^\top} C^\top \tilde{y}(s)\mathrm{d}s = \tilde{O}(T)x_0 \tag{3.12}$$

Así, si (A, B, C) es observable, por el corolario 3.5 sabemos que $\tilde{O}(T)$ es invertible y por lo tanto se concluye que

$$x_0 = \tilde{O}(T)^{-1} \int_0^T \mathrm{e}^{sA^\top} C^\top \tilde{y}(s)\mathrm{d}s \tag{3.13}$$

Como $\tilde{y}(\cdot)$ es conocido, podemos reconstruir $x(\cdot)$ en $[0,T]$ a partir de x_0.

3.3 Estabilización de sistemas lineales.

En esta sección determinaremos las condiciones que son necesarias para estabilizar asintóticamente un sistemas lineal autónomo controlado como es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \qquad x(0) = x_0, \tag{3.14}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Para esto, comenzaremos definiendo un concepto que será de gran importancia.

Definición 3.7. *Diremos que una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ es* Hurwitz *si todos sus valores propios tienen parte real estrictamente negativa.*

Notemos que al considerar un control de la forma $u(\cdot) = Kx(\cdot)$ con $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el sistema (3.14) queda dado por:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t); \qquad x(0) = x_0, \tag{3.15}$$

Recordando que 0 es un punto de equilibrio (globalmente) asintóticamente estable para un sistema homogéneo de la forma (3.15) si la matriz que lo define, $A + BK$, es Hurwitz (ver Teorema 13.30, Capítulo 13, del libro de Trélat [Tré05]), concluimos directamente que el 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema (3.14) con el control $u(\cdot) = Kx(\cdot)$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.8. *Diremos que el sistema lineal autónomo controlado (3.14) es* estabilizable por retroalimentación (o feedback) lineal *si existe $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A + BK$ es Hurwitz. En este contexto, K es llamada* matriz de ganancia *del sistema.*

Con esta definición, surge naturalmente la pregunta acerca de que tipos de sistemas lineales controlados son estabilizables por feedback lineal, es decir, bajo que criterios podemos asegurar la existencia de la matriz K tal que $A+BK$ sea Hurwitz. El siguiente resultado nos dará una respuesta a esto.

Teorema 3.9 (**Localización de polos.**). *Si (A, B) es controlable entonces existe $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $A + BK$ tiene el espectro de cualquier matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

Antes de demostrar este teorema, primero probaremos el siguiente lema.

Lema 3.10. *Si (A, B) cumple Kalman, entonces existen $y \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $(A + BC, By)$ verifica Kalman.*

Demostración. Notemos que existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $By \neq 0$. En efecto, si no existiera, $By = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$, y así, para todo $k \in \mathbb{N}$ $A^kBy = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$, luego se contradice que la matriz de Kalman es de rango completo.

De este modo, definimos $x_1 := By$ no nulo. Notemos que, de manera similar, también existe $x_2 \in Ax_1 + \text{Im } B$ tal que $\dim \text{Span}(\{x_1, x_2\}) = 2$, donde $\text{Span}(\{x_1, x_2\})$ corresponde al subespacio vectorial generado por x_1 y x_2. En efecto, supongamos que no existe tal x_2. Luego, se tiene que

$$Ax_1 + Im\ B \subseteq \mathbb{R}x_1,$$

de donde se deduce que $Ax_1 \in \mathbb{R}x_1$ e $\operatorname{Im} B \subseteq \mathbb{R}x_1$. Entonces

$$\text{Im } AB = A\,\text{Im } B \subseteq \mathbb{R}Ax_1 \subseteq \mathbb{R}x_1$$

Luego, inductivamente se obtiene que

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \text{Im } A^i B \subseteq \mathbb{R}x_1.$$

Lo que nos permite concluir que

$$\text{Im } (B|AB|\cdots|A^{n-1}B) \subseteq \mathbb{R}x_1,$$

lo que contradice que el sistema (A,B) verifica el criterio de Kalman. De esta manera, probamos que existe tal x_2 y se construye como $x_2 = Ax_1 + By_1$ con $y_1 \in \mathbb{R}^m$ algún vector tal que x_1 y x_2 sean linealmente independientes.

De forma general, para $k \leq n$, existe $x_k = Ax_{k-1}+By_{k-1}$ tal que $\dim[\text{Span}(\{x_1, x_2, ..., x_k\})] = k$.

En caso de no existir dichos x_k, se tendría que

$$Ax_{k-1} + \text{Im } B \subseteq \text{Span}(\{x_1, ..., x_{k-1}\}),$$

de lo que se desprende que $Ax_{k-1} \subseteq \text{Span}(\{x_1, ..., x_{k-1}\})$ y que $\text{Im } B \subseteq \text{Span}(\{x_1, ..., x_{k-1}\})$.

Con lo anterior, se prueba que $\text{Im } A^i B \subseteq \text{Span}(\{x_1, ..., x_{k-1}\})$, para todo $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, lo que contradice el criterio Kalman, por lo tanto existen tales x_k.

Iterativamente, se construye la secuencia $x_k = Ax_{k-1}+By_{k-1}$ donde $x_k \in Ax_{k-1}+Im\ B$. De esta manera, contruye el conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$, lo que por construcción es una base de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$Cx_1 = y_1,\ Cx_2 = y_2, ...,\ Cx_n \text{ libre.}$$

Notemos que existe tal C pues la matriz $(x_1|...|x_n)$ es invertible. Veamos que la matriz C y el vector y hace que el sistema $(A + BC, By)$ cumplan Kalman.

En efecto:

$$(A + BC)By = (A + BC)x_1 = (Ax_1 + BCx_1) = (Ax_1 + By_1) = x_2.$$

Luego, a partir de lo anterior se deduce que

$$(A + BC)x_2 = Ax_2 + BCx_2 = Ax_2 + By_2 = x_3.$$

Procediendo inductivamente se concluye que

$$K_{A+BC,By} = (x_1|x_2|...|x_n),$$

donde $K_{A+BC,By}$ es la matriz de Kalman del sistema $(A + BC, By)$. Como $\{x_1, \cdots, x_n\}$ forma una base, se obtiene que $K_{A+BC,By}$ es de rango completo. De esta manera, se concluye $(A + BC, By)$ verifica el criterio de Kalman. ∎

Un concepto que será útil para probar el teorema de localización de polos, es la similaridad de sistemas.

Definición 3.11. *Diremos que los sistemas de control* $\dot{x_1} = A_1x_1 + B_1u_1$, $\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2$ *son similares si existe una matriz invertible* P *tal que* $A_2 = PA_1P^{-1}$ *y* $B_2 = PB_1$*.*

Con este concepto de similaridad de sistemas, el siguiente resultado, conocido como la forma canónica de Brunovski, nos entrega una formulación similar al sistema (A, B), que en varios casos puede ser útil debido a que esta forma solo depende del polinomio característico de la matriz A.

Teorema 3.12 (**Forma canónica de Brunovski.**). *Considere el sistema de control* (A, B)*. Si* $m = 1$ *y el par* (A, B) *es controlable, entonces es similar al sistema* $(\tilde{A}, \tilde{B})$*, donde*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes $\{a_1, \cdots, a_n\}$ *son tales que* $p_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ *es el polinomio característico de la matriz* A*.*

Demostración. Ver Teorema 2.4, Capitulo 2 del libro de Trélat [Tré05]. ■

Con las herramientas obtenidos gracias a estos resultados previos, nos disponemos a demostrar el teorema de localización de polos.
Demostración. (del Teorema de localización de polos.)

Supongamos primero que $m = 1$. Como el sistema (A, B) verifica Kalman, por el teorema (3.12), es similar al sistema $(\tilde{A}, \tilde{B})$ donde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes $\{a_1, \cdots, a_n\}$ son tales que $p_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ es el polinomio característico de la matriz A. Como los sistemas (A, B) y $(\tilde{A}, \tilde{B})$ son similares, existe una matriz P invertible tal que $A = P\tilde{A}P^{-1}$ y $B = P\tilde{B}$.

Sea $\tilde{K} = (K1|K2|\cdots|K_n) \in I\!R^{n\times n}$ y $p(x) = x^n + \alpha_1x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ algún polinomio de grado n. Con esto, tenemos que

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ k_1 - a_n & k_2 - a_{n-1} & \cdots & k_n - a_1 \end{pmatrix},$$

con

$$p_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}}(x) = x^n + (a_1 - k_n)x^{n-1} + \cdots + (a_n - k_1) \tag{3.16}$$

el polinomio característico de la matriz $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$.

Definamos $k_i = a_{n-i+1} + \alpha_i$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$. Si consideramos

$$K_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_1 \end{pmatrix}, \cdots, K_n = \begin{pmatrix} k_n \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

y definimos $\tilde{K} = (K_1|K_2|\cdots|K_n)$ por lo probado en (3.16) se concluye que

$$p_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}}(x) = p(x),$$

es decir, el polinomio característico de matriz $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ es el polinomio $p(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$.

Ahora, si consideramos $K = \tilde{K}P^{-1}$ y usando que $A = P\tilde{A}P^{-1}$ y $B = P\tilde{B}$, tenemos que

$$p_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}}(\lambda) = \det(\lambda I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})) = \det(\lambda P^{-1}P - (P^{-1}AP + P^{-1}BKP)). \tag{3.17}$$

Usando que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, se deduce que

$$p_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}}(\lambda) = \det(P^{-1})\det(\lambda I - (A + BK))det(P). \tag{3.18}$$

y como $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$, se concluye que

$$p_{\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}}(\lambda) = \det(\lambda I - (A + BK)),$$

y de esta manera se obtiene que el polinomio característico de $A + BK$ esta dado por el polinomio p. Con eso logramos concluir que para todo polinomio p de grado n existe K tal que $A + BK$ tiene a p como polinomio característico, lo que concluye el teorema en el caso $m = 1$.

En un caso general, si $m \geq 1$ por el lema (3.10) existe $y \in \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $(A + BC, By)$ verifica Kalman.

Pero por lo probado en el caso $m = 1$, dado un polinomio $p(x)$ de grado n, existe una matriz $\tilde{K}$ tal que el espectro de $A + BC + By\tilde{K}$ esta dado por la raíces de p. Si consideramos

$$K = C + y\tilde{K},$$

tenemos que

$$p(x) = p_{A+BC+By\tilde{K}}(x) = p_{A+B(C+y\tilde{K})}(x) = p_{A+BK}(x).$$

De esto último se concluye que el espectro de $A + BK$ esta dado por las raíces de p.

Para concluir el teorema basta notar que si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, y consideramos $p(x) = (x - \lambda_1) \cdot ... \cdot (x - \lambda_n)$ donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de M, existe K tal que $A + BK$ tiene por polinomio característico al polinomio p, lo que equivale a que $A + BK$ tiene el mismo espectro que M. ■

Luego, el teorema de localización de polos nos permite probar de manera directa el siguiente resultado.

Corolario 3.13. *Sea (A,B) controlable, entonces (A, B) es estabilizable mediante feedback lineal.*

3.4 Detectabilidad y observadores asintóticos.

Volvamos al sistema lineal autónomo controlado y observado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

En vista de esto, surge la pregunta, si es que dados (A, B, C), $y(\cdot)$ y $u(\cdot)$, pero desconociendo x_0 (y así también $x(\cdot)$), puedo conocer asintóticamente $x(\cdot)$.

Consideremos dos ideas (ingenuas) que surgen naturalmente para tratar con este problema:

- Primera idea:

  Generar $\hat{x}(\cdot)$ mediante

  $$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad ; \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \tag{3.20}$$

  donde $\hat{x}_0$ es conocido. Definamos $e_x := \hat{x} - x$, que representa el error de estimación. Notemos que $\dot{e}_x = Ae_x$ y $e_x(0) = \hat{x}_0 - x_0$, donde $e_x(0)$ representa el error inicial. En el caso de que A sea Hurwitz, $e_x \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo cual resolvería nuestro problema. Sin embargo, si A es inestable entonces los errores iniciales se incrementaran exponencialmente, por lo tanto este primer apronte no es satisfactorio.

- Segunda idea:

  En el mismo contexto del problema (3.19), podemos considerar un control por retroalimentación dado por $u(\cdot) = Ky(\cdot) = KCx(\cdot)$, así el sistema queda:

  $$\dot{x} = (A + BKC)x$$

  Sin embargo, $A + BKC$ puede no ser Hurwitz, incluso si (A, B) es controlable y si (A, C) es observable. Veamos un ejemplo donde sucede esto.

  Ejemplo 3.14. *Consideremos*

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = (1, 0).$$

  La matriz de Kalman K del sistema queda dada por

  $$K = (B|AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  claramente esta matriz tiene rango 2, por lo tanto se verifica la condición de Kalman y así el sistema es controlable.

  Por otro lado,

  $$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  tiene rango 2, y por el corolario (3.5) se concluye que el sistema (A, C) es observable.

Sin embargo, para $k \in I\!R$,

$$A + BkC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

no es Hurwitz, pues la traza de $A+BkC$ es 0, y como la traza es la suma de los valores propios, $A + BkC$ no puede ser Hurwitz, independiente del valor de k que se escojan.

3.5 Observador de Luenberger.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y); \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \tag{3.21}$$

Nos interesa ver si podemos escoger $L \in I\!R^{m\times p}$ de manera adecuada de modo que los errores de estimación converjan a 0, esto es, $e_x := \hat{x} - x \to 0$ cuando $t \to \infty$. En este contexto, podemos estudiar el sistema asociado a los errores de estimación que se obtienen con la predicción $\hat{x}$. Notemos que

$$\dot{e_x} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = A(\hat{x} - x) + L(\hat{y} - y),$$

y usando que $y = Cx$, $\hat{y} = C\hat{x}$, se obtiene que

$$\dot{e}_x(t) = (A + LC)e_x(t).$$

De esta manera, el sistema asociado al error de estimación e_x queda dado por

$$\dot{e_x}(t) = (A + LC)e_x(t); \qquad e_x(0) = \hat{x}_0 - x(0) \tag{3.22}$$

donde $x(0)$ no es conocido. Por esto, la intención es que el error de estimación e_x converja a 0 independiente de la condición inicial, y de este modo asegurar que el estimador de Luenberger aproxima asintóticamente a x. Como comentamos en etapas previas, si $(A + LC)$ es Hurwitz el 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema (3.22), esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3.15. *El sistema (3.19) es detectable si $A + LC$ es Hurwitz.*

En la sección 3.1 se discutió el concepto de observabilidad de un sistema (A, B, C). Con la definición previa nos interesa relacionar el concepto de observabilidad con la detectabilidad de un sistema, el siguiente resultado nos ayudará a relacionar estos conceptos.

Teorema 3.16. *(A, B, C) observable entonces (A, B, C) es detectable.*

Demostración. Del corolario 3.5 sabemos que (A, B, C) es observable si y solamente si $(A^\top, C^\top)$ es controlable. Luego, por el teorema (3.9), $\exists \tilde{L}$ tal que $A^\top + C^\top \tilde{L}$ es Hurwitz, lo que es equivalente a que $A + \tilde{L}^\top C$ sea Hurwitz. Así, si consideramos $L = \tilde{L}^\top$, se obtiene que $A + LC$ es Hurwitz, concluyendo que (A, B, C) es detectable. ■

3.6 Compensadores (observadores-controladores) asintóticos.

En esta sección supondremos que el sistema (3.19) es controlable y observable. En base a los teoremas 3.9) y 3.16 obtenemos que este sistema es estabilizable y detectable, es decir, existe K tal que $A + BK$ es Hurwitz y existe L tal que $A + LC$ es Hurwitz.

Consideremos ahora $x_r(\cdot)$ solución (de referencia) de (3.19), para cierto control $u_r(\cdot)$, que permite llevar $x_r(\cdot)$ de x_0 a x_1 en un tiempo $T > 0$ (i.e., $x_r(0) = x_0$ y $x_r(T) = x_1$). Supondremos que T es suficientemente grande. Pensemos que esta solución podría ser desconocida o no completamente fiable (por ejemplo, porque no tenemos completa seguridad del valor de x_0). En esta sección deseamos utilizar la observación $y(\cdot)$, obtenida al aplicar un control $u(\cdot)$ (por determinar), para llevar x_0 a x_1 de manera aproximada, pero de manera robusta, es decir, sin confiar completamente en $(x_r(\cdot), u_r(\cdot))$. Para esto, planteamos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) = u_r(t) + K(\hat{x}(t) - x_r(t)) \end{cases} \tag{3.23}$$

Consideremos $(x(\cdot), u(\cdot))$ solución del sistema (3.19), definamos $\Delta_x(\cdot) := x(\cdot) - x_r(\cdot)$ y $e_x := \hat{x}(\cdot) - x(\cdot)$. Basándonos en lo mencionado previamente, nos interesaría que $\Delta_x(t)$ tienda a 0 cuando $t \to +\infty$, pues de este modo $x(\cdot)$ aproximaría asintóticamente a la solución de referencia $x_r(\cdot)$, y también deseamos que $e_x(\cdot)$ tienda a 0 asintóticamente, pues de este modo $\hat{x}(\cdot)$ sería un estimador asintótico de $x(\cdot)$, y por ende de $x_r(\cdot)$. Así, si $\Delta_x(t)$ y $e_x(\cdot)$ tienden a 0 cuando $t \to +\infty$, obtenemos que $\hat{x}(\cdot)$ aproxima a $x_r(\cdot)$, y en consecuencia lleva aproximadamente la trayectoria x_0 a x_1 en un tiempo T suficientemente grande. Para estudiar esto, notemos que

$$\dot{\Delta}_x(\cdot) = \dot{x}(\cdot) - \dot{x}_r(\cdot) = (Ax + Bu) - Ax_r - Bu_r = A\Delta_x + BK(\hat{x} - x_r),$$

lo que nos permite concluir que

$$\dot{\Delta}_x(\cdot) = (A + BK)\Delta_x(\cdot) + BKe_x(\cdot).$$

Por otro lado , tenemos que

$$\dot{e}_x(\cdot) = Ae_x(\cdot) + LC(\hat{x}(\cdot) - x(\cdot)) = (A + LC)e_x(\cdot),$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta}_x \\ e_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ e_x \end{pmatrix}.$$

Si definimos

$$M := \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix},$$

y utilizando que para una matriz por bloques, se verifica que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$ (ver Proposición 6.1.16, Capítulo 6, libro de Meyer [Mey00]), M es Hurwitz pues $A + BK$ y $A+LC$ lo son. Por lo tanto, $\Delta_x(t)$ y $e_x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y de este modo $\hat{x}(t) - x_r(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así, $\hat{x}(\cdot)$ lleva de x_0 a x_1 y este solo depende de la observación $y(\cdot)$.

Ejercicio 3.17. *Adaptar lo anterior para que $\hat{x}(\cdot)$ estabilize el sistema en base a las observaciones $y(\cdot)$.*