PAUTA AUX #14 medida.

P1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e.d.p. $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ partición medible no trivial, con $|I| \leq |\mathbb{N}|_0$

$X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) $$\mathbb{E}[X \mid \sigma(\{A_i\}_{i\in I})] = \sum_{i\in I} \frac{\int_{A_i} X \, d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i} \quad (=: f)$$

Sea $\mathcal{B} := \sigma(\{A_i\}_{i\in I})$. Si el lado derecho cumple: -

- ser $\mathcal{B}$-medible
- $\forall C \in \mathcal{B}$ $$\int_C X \, d\mathbb{P} = \int_C f \, d\mathbb{P}$$

Por unicidad ctp de la $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{B}]$ se tiene lo pedido. Veamos entonces:

(1) f es $\mathcal{B}$-medible. Hay 2 casos: $|I| < \infty$ y $|I| = \mathbb{N}_0$

- caso finito:

$$\sum_{i\in I} \int_{A_i} X \, d\mathbb{P} \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i\in I} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

no son "variables", son números

como $A_i \in \mathcal{B}$ por def de σ-Alg generada, obtenemos f simple, i.e., medible

- caso infinito: tomamos f_n como los primeros n términos de la suma que define f.

Claramente $f_n \longrightarrow f$ puntual

Con ello, como límite de medibles es medible, y los f_n son simples, se obtiene lo pedido //

(2) Sea $C \in \mathcal{B}$. Como $\{A_i\}$ es partición $\exists J \subseteq I$ t.q.

$$(*)\ C = \biguplus_{j \in J} A_j$$

Ocupemos esto para probar la igualdad buscada:

$$\int_C \sum_{i \in I} \int_{A_i} X \, dP \cdot \frac{1}{P(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, dP$$

$$= \sum_{j \in J} \int_{A_j} \sum_{i \in J} \int_{A_i} X \, dP \cdot \frac{1}{P(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, dP$$

De nuevo, como $\{A_i\}_i$ es partición cada término de la suma en i es nulo excepto si $i = j$.

Con esto:

$$= \sum_{j \in J} \int_{A_j} \underbrace{\int_{A_j} X \, dP \cdot \frac{1}{P(A_j)}}_{\text{cte para la integral grande}} \cdot \mathbb{1}_{A_j} \, dP$$

$$= \sum_{j \in J} \int_{A_j} X \, dP \cdot \frac{1}{P(A_j)} \cdot \int_{A_j} \mathbb{1}_{A_j} \, dP \longrightarrow P(A_j)$$

$$= \sum_{j \in J} \int_{A_j} X \, dP = \int_C X \, dP. \quad \text{por } (*)$$

Así, con el argumento dado al inicio, se tiene lo pedido.

b) tomando $C = \Omega$, $X = \mathbb{1}_B$.

$$\mathbb{P}(B) = \int_\Omega \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mid \mathcal{B}] \, d\mathbb{P}$$

por def. de esperanza condicional

$$\overset{a)}{=} \int_\Omega \sum_{i \in I} \int_{A_i} \mathbb{1}_B \, d\mathbb{P} \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i} \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_\Omega \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) \cdot \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, d\mathbb{P}$$

usando Fubini con la cuenta-puntos o TCD.

$$= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \, d\mathbb{P}$$

$$= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$ con lo que probamos lo pedido.

P2) $(\mathcal{F}_n)_n$ secuencia creciente de sub σ-alg's de $\mathcal{F}$.

a) Pruebe que $X_n := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ es martingala. ($X \in \mathcal{L}^1$)

En efecto, debemos chequear:

(1) $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}_n)$ $\forall n$.

En efecto: $\displaystyle\int_\Omega X_n \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] \, d\mathbb{P}$

$= \displaystyle\int_\Omega X \, d\mathbb{P} < \infty$ donde la última igualdad sale de la def de $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_n]$

(2) Prop. de martingala:

$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ c.t.p.

En efecto, veamos que $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ cumple las propiedades de $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ $(= X_n)$.

- $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ es $\mathcal{F}_n$-medible por def.
- Sea $C \in \mathcal{F}_n$:

$$\int_C \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \, d\mathbb{P} = \int_C X_{n+1} \, d\mathbb{P} = \int_C \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{n+1}] \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_C X \, d\mathbb{P} = \int_C \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] \, d\mathbb{P} = \int_C X_n \, d\mathbb{P}.$$

Así, X_n es $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ c.t.p.

b) Muestre que $(X_n)_n$ integrable cumple:

$(X_n)_n$ es martingala $\iff$ $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] = 0 \quad \forall n.$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $(X_n)_n$ integrable martingala.

$\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]$

$= X_n - X_n$ donde el primer X_n sale de que el proceso es martingala, y el segundo de que X_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

$= 0.$

$\boxed{\Leftarrow}$ Debemos probar que X_n es $\mathcal{F}_n$ medible y cumple la prop de martingala, i.e., ver que es esperanza condicional.

1) El proceso es integrable por hipótesis.

2) Sea $C \in \mathcal{F}_n$:

$$\int_C X_n \, d\mathbb{P} = \int_C X_{n+1} - (X_{n+1} - X_n) \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_C X_{n+1} \, d\mathbb{P} - \int_C X_{n+1} - X_n \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_C X_{n+1} \, d\mathbb{P} - \int_C \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] \, d\mathbb{P}$$

$$= \int_C X_{n+1} \, d\mathbb{P}.$$ con ello se concluye.

También sale de $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n] = 0$

$= \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - \underbrace{\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]}_{\mathcal{F}_n}$

Pero lo otro es más didáctico