MA3802-1 Teoría de la medida
Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Axel Álvarez
Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 14: Esperanzas condicionales.

30 de noviembre de 2023

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad

P1. Sean $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω tal que $|I| \leq \aleph_0$ y para todo $i \in I$ se tiene $\mathbb{P}(A_i) \in (0,1)$. Sea X una variable aleatoria tal que $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Pruebe la siguiente igualdad:

$$\mathbb{E}(X \mid \sigma((A_i)_{i\in I})) = \sum_{i\in I} \frac{\int_{A_i} X d\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i} \quad \mathbb{P} - c.s$$

b) Deduzca de lo anterior la formula de probabilidades totales, para todo $B \in \mathcal{F}$:

$$\mathcal{P}(B) = \int_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

P2. Sea $(\mathcal{F}_n)n \in \mathbb{N}$ una secuencia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, a esta secuencia se le llama filtración. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ para todo n. Decimos que este proceso es martingala si:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \ c.s$$

a) Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muestre que el proceso $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ es una martingala.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso adaptado e integrable, muestre que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala ssi $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(X_n)_n$ es adaptado si X_n es $\mathcal{F}_n$-medible.