Pauta Aux. #12 Medida.

P1 a) Sea $f: X \to \mathbb{R}_+$ simple: $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$.

$H_- = \{(x,t) : 0 \leq t < f(x)\}$
$= \bigcup_{i=1}^{N} \underbrace{A_i \times [0, a_i)}_{\text{medible}} \hookrightarrow \mathcal{L}\text{-medible}$ } unión finita

$H = \{(x,t) : 0 \leq t \leq f(x)\} = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \times [0, a_i]$

Ahora si f es M^+ cualquiera:

Sea $\{f_n\}_n \in S^+$ tq $f_n \nearrow f$

Sea $H_-^n := \{(x,t) : 0 \leq t < f_n(x)\}$

notemos que si $(x,t) \in H_-^n$:

$0 \leq t < f_n(x) \leq f^{n+1}(x)$, i.e., $(x,t) \in H_-^{n+1}$

Es decir $\{H_-^n\}_n$ es creciente. Veamos que crece a H_- i.e.,

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_-^n = H_-$

Si probamos esto, como H_-^n es medible tm por caso simple se obtiene lo pedido.

$\boxed{\supseteq}$ En efecto si no fuese el caso $\exists (x,t) \in H$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}$ $t \geq f_n(x)$. tomando límite:

$\Rightarrow t \geq f(x)$ pero $(x,t) \in H$ $\rightarrow\leftarrow$

$\boxed{\subseteq}$ Sea $(x,t) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^n$ $\exists n \in \mathbb{N}: 0 \leq t < f_n(x)$

como $f_n \nearrow f$: $t < f_n(x) \leq f(x)$ con ello

$(x,t) \in H_-$ //

Para H este truco no funciona $\to$ verificar (propuesto).

Sin embargo sean $H_-^k := \{(x,t) : 0 \le t < f(x) + \frac{1}{k}\}$

notemos que $H_-^k \downarrow H$ i.e., $\bigcap_k H_-^k = H$

(propuesto, relacionado a lo otro).

Así H es intersección numerable de medibles i.e., es medible.

Con esto se obtiene lo pedido ∎

b) Ocupamos el Teorema 6.3.4 (existencia y unicidad de medida producto).

Como ambos espacios son σ-finitos tenemos

(1) $\mu \otimes \lambda(H) = \int_X \lambda(H^{\mathbb{R}_+}(x))\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(H^X(t))\, dt.$

(2) $\mu \otimes \lambda(H_-) = \int_X \lambda(H_-^{\mathbb{R}_+}(x))\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(H_-^X(t))\, dt.$

Notemos que:

$H^{\mathbb{R}_+}(x) = \{t \in \mathbb{R}^+ : (x,t) \in H\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : 0 \le t \le f(x)\}$

$H_-^{\mathbb{R}_+}(x) = \{t \in \mathbb{R}^+ : (x,t) \in H_-\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : 0 \le t < f(x)\}$

Ambos tienen medida de Lebesgue $f(x)$

Con ello inmediatamente, de la 1ª igualdad de (1) y (2)

(*) $\mu \otimes \lambda(H) = \mu \otimes \lambda(H_-) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$

Veamos las otras igualdades. De la 2ª igualdad de ① y ② obtenemos, con (*), que estas 3 expresiones recién obtenidas son iguales a:

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x : t < f(x)\})\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{x : t < f(x)\})\, d\lambda(t)$$

$\vdash$ CASO H $\dashv$ $\vdash$ CASO H_- —

Aplicando la definición de fibm. Con ello se prueba lo pedido.

c) Notemos que $\{x : f(x) = t\} = \{x : f(x) \geq t\} \setminus \{x : f(x) > t\}$
$= H^{x}(t) \setminus H_-^{x}(t)$ Con ello:

$$\left[\mu(\{x : f(t) = t\}) = \mu(H^{x}(t) \setminus H_-^{x}(t))\right] \quad (\clubsuit)$$

Queremos probar que esto es cero λ-ctp.
Integrando $(\clubsuit)$ a ambos lados con respecto a $d\lambda(t)$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{x : f(t) = t\})\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(H^{x}(t) \setminus H_-^{x}(t))\, d\lambda(t)$$

Notando $H^{x^+}(t) \setminus H_-^{x^+}(t) = (H \setminus H_-)^{x^+}(t)$
y usando el mismo teorema que en b) queda:

$$= \int_X \lambda((H \setminus H_-)^{\mathbb{R}^+}(x))\, d\mu(x) = \int_X \lambda(\{f(x)\})\, d\mu(x)$$

$= 0$ pues $\lambda(\{f(x)\}) = 0, \forall x$.

Con lo que:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{x : f(t) = t\})\, d\lambda(t) = 0$$, como $\mu \geq 0$, obtengo que:

$$\mu(\{x : f(t) = t\}) = 0 \quad \lambda\text{-ctp}$$ que es lo pedido.

P2) Sea $A \subseteq X_1$ pdq $A \in \mathcal{F}_1$. En efecto:

Sea $\hat{x} \in A_2$, $B = A \times A_2 \Rightarrow A \neq \phi \Rightarrow B \neq \phi$

Sea A su mz. $\tilde{A} \in \mathcal{F}_1$ tq $A \subseteq \tilde{A}$ (ejemplo $\tilde{A} = X_1$)

tal que $A \subseteq \tilde{A}$. Sea $\tilde{B} = \tilde{A} \times A_2 \rightarrow \tilde{A} \neq \phi \Rightarrow \tilde{B} \neq \phi$

Notemos que $\tilde{B}$ es un rectángulo, con ello:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (\tilde{B}) = \mu_1(\tilde{A}) \cdot \mu_2(A_2) = 0$$

Así, $\tilde{B}$ es despreciable y $B \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$

(pues la σ-Alg producto es completa por enunciado).

Con ello, por lema de medibilidad de fibras:

$B^{x_1}(\hat{x}) = A$ es $\mathcal{F}_1$-medible, y probamos lo pedido.

Ojo: Reflexionar por qué el argumento se cae si no tengo garantías de que $A_2 \neq \phi$.

P3 a) Sean $g_1, g_2 \in [f]$ continuas, con $[f] \in L^\infty$ PDQ $g_1 = g_2$.

En efecto, como $g_1, g_2 \in f$, $g_1 = g_2$ ctp

queremos probar que son iguales sin el ctp.

Para esto, bastará afirmarnos de la continuidad para ver que:

Sea x tq $g_1(x) \neq g_2(x)$. Y $\varepsilon_x = |g_1(x) - g_2(x)|$

Por continuidad de g_1 y g_2:

$\exists\ \delta_1^x, \delta_2^x > 0$ tq $\forall y\ (x-\delta_1^x, x+\delta_1^x)$: $|g_1(x) - g_1(y)| < \frac{\varepsilon_x}{3}$

$\forall y\ (x-\delta_2^x, x+\delta_2^x)$: $|g_2(x) - g_2(y)| < \frac{\varepsilon_x}{3}$

Sea $\delta_x = \min\{\delta_1^x, \delta_2^x\}$ tenemos que en el intervalo $(x-\delta, x+\delta)$ se cumplen ambas. Con ello, en ese intervalo:

$$|g_1(y) - g_2(y)| = |g_1(y) - g_1(x) + g_1(x) - g_2(y) + g_2(x) - g_2(x)|$$

$$\geq \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_x}{3} + \frac{\varepsilon_x}{3} = \frac{\varepsilon_x}{3} > 0$$

con lo que el conjunto $\{g_1 \neq g_2\}$ contiene un intervalo $\rightarrow\!\!\times$ ∎

b) $f(x) = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(x)$

c) Sean $\{[f]_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$. tq $[f_n] \longrightarrow [f]$ en $\|\cdot\|_\infty$ PDQ $[f] \in C$

En efecto: sean $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ los elementos continuos de cada $[f]_n$ respectivo. (recordar que son únicos).

Queremos encontrar un $g \in [f]$ continuo.

Sabemos que en las continuas $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremo, bajo el cual el espacio de funciones continuas es completo (teo. del límite uniforme de Análisis).

Con ello $\exists g$ continua tq que $\|g_n - g\| \to 0$ uniformemente.

Con ello, nos gustaría que $g \in [f]$. En efecto:

$$\|f - g\|_\infty = \|f - g_n + g_n - g\|_\infty = \|f - g_n\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty$$

$< \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ (tomando los g_n adecuados).

Con lo que probamos lo pedido.