Auxiliar #11 medida

P1] (X,θ) e.t. T_2 loc. comp. $\{\mu_n\}_n$ medidas de prob en $\mathcal{B}(X,\theta)$.

$$\ell(f) := \lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n \in \mathbb{R} \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}).$$

a) Dem ℓ medida de Radon, y:

$\exists!\ \mu$ regular en $\mathcal{B}(X,\theta)$ tq $\ell(f) = \int f\,d\mu$.

Recordemos ℓ lineal positivo $\Rightarrow$ ℓ mdR.

ℓ es lineal pues el límite existe $\forall f$, $\int$ pues son a soporte compacto.

Luego puedo separar el lim pues existen por separado.

Además $f \geq 0 \rightarrow \int f\,d\mu_n \geq 0$ $\forall n$

pues μ_n medida $\rightarrow$ $\ell(f) \geq 0$

Con ello ℓ es de Radon

Por Riesz $\ell \in M^+(X)$

$\Rightarrow \exists!$ μ boreliana regular tal que

$$\ell(f) = \int f\,d\mu.$$

b) $0 \leq \mu(X) \leq 1$. μ es medida, luego, $\mu(X) \geq 0$

Si $\mu(X) > 1$ entonces: toda medida regular es σ-finita. + X loc. compacto.

$\exists\ C$ compacto tal que $\mu(C) > 1$

Sea U un abierto que lo contiene, por Urysohn:

$\exists f \in \mathcal{C}_0(X)$ tq $f|_C = 1$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$

Pero: $f \leq 1 \Rightarrow \int f \, d\mu_n \leq 1 \quad \forall n$ pues μ_n son de prob.

$\Rightarrow \lim \int f \, d\mu_n \leq 1$ pero a su vez

$\int f \, d\mu \geq \int \mathbb{1}_C \, d\mu = \mu(C) > 1 \Rightarrow$!!

c) Dem $\forall K$ cpcto Θ abierto se cumple:

① $\limsup_n \mu_n(K) \leq \mu(K)$

② $\liminf_n \mu_n(\Theta) \geq \mu(\Theta)$

μ regular $\Rightarrow$ Aproximo por arriba con abiertos, por debajo con compactos.

Veamos ① $\exists U_n$ abiertos tq $\mu(U_n) \searrow \mu(K)$

Usando Urysohn tomo $f_n|_K = 1$

$\operatorname{supp}(f_n) \subseteq U_n$

$\limsup_i \mu_i(K) = \limsup \int \mathbb{1}_K \, d\mu_i$

$\leq \limsup_i \int f_n \, d\mu_i = \lim_i \int f_n \, d\mu_i = \ell(f_n)$

$= \int f_n \, d\mu \longrightarrow \mu(K)$.

② es análogo y queda Propuesto.

d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon$ cpcto tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_n(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$.

$$\mu_n(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon \iff 1 - \mu_n(K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underset{\underset{\mu_n(X)}{\wedge|}}{\mu_n(K_\varepsilon)} \geq 1 - \varepsilon \xrightarrow[n \to +\infty]{\lim} \mu(X) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad //$$

$\boxed{P2}$ Queremos probar:

$$\nu(\Phi(A)) = \nu(A)$$

$$\int_{\Phi(A)} g(y)\, d\mu(y) \qquad \int_A g(x)\, d\mu(x)$$

$\vdash$ Queremos usar CDV $\dashv$

Si pudiéramos usarlo:

$$\int_{\Phi(A)} g(y)\, d\mu(y) = \int_A g(\Phi(y)) \cdot |\det(\Phi')|\, d\mu(y)$$

$\Phi' = \Theta$, y Θ ortonormal $\Rightarrow |\det(\Theta)| = 1$

$$\Rightarrow \int_{\Phi(A)} g(y)\, d\mu(y) = \int_A f\left(\sqrt{\|\Theta y\|}\right) d\mu(y)$$

$$= \int_A f\left(\sqrt{y^T \underbrace{\Theta^T \Theta}_{I} y}\right) d\mu(y) = \int_A f(\|y\|)\, d\mu(y)$$

$$= \int_A g(y)\, d\mu(y)$$

Probemos las hipótesis y estaríamos listos.

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto? sí: $\Omega = \mathbb{R}^n$.
- Φ biyectiva? sí, es multiplicar por matriz invertible i.e., biyectiva (por lineal).
- Φ C^1? es lineal en dim finita $\rightarrow$ es C^∞.
- su det es distinto de nulo (es 1 o -1 cte).

$\rightarrow$ se puede usar COV.

$\boxed{P3}$ a) En efecto es finita pues

$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx = 1$ porque ϕ es densidad de una $N(0,1)$.

Esto desde ya implica $\nu \ll \lambda$

A su vez, $\phi > 0$ en todo $\mathbb{R}$, luego

$\nu(A) = 0 \iff \int_A \phi\,dx = 0 \iff \mathbb{1}_A = 0$ c.s.

$\iff \lambda(A) = 0$ i.e. $\lambda \ll \nu$.

b) Basta definir en los cilindros por σ-finitud

$\nu^n([a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n])$

$= \int_{[a_1,b_1]} \dots \int_{[a_n,b_n]} \phi(x_1)\,\phi(x_2) \dots \phi(x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$

$= \int_{[a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]} \prod_{i=1}^n \phi(x_i)\; d\lambda^n(x_1,\dots,x_n)$

En verdad sale de que dRN de producto es producto de drn's. Ejercicio 03 Biblia. + inducción.

i.e. $\Phi(x_1,\dots,x_n) = \phi(x_1) \dots \phi(x_n)$

c) $\rho(A) := \nu(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in A\})$

$= 2\nu(\{x>0 \mid x^2 \in A\})$

$= 2\nu(r^{-1}(A))$ donde $r(x) = x^2$

$r^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

$$= 2\int_{r^{-1}(A)} \phi(x)\,dx \underset{\text{CDV}}{=} \cancel{2}\int_A \phi(\sqrt{x})\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow g = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(\frac{-x}{2}\right)$$