PAUTA.

P1) a) Propuesto

b) μ, ν finitas $\lambda := \mu + \nu$.

PDQ $\exists! \, g \in L^2(\lambda)$ tq $\int (1-g) f \, d\nu = \int f g \, d\mu \quad \forall f \in L^2(\lambda)$

En efecto, sea $\phi : L^2(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f \longmapsto \int f \, d\nu$$

como $f \in L^2(\lambda)$, es claro que $f \in L^2(\nu)$

pues:
$$\int |f| \, d\nu \leq \int |f| \, d\nu + \int |f| \, d\mu = \int |f| \, d\lambda$$

$$= \int |f| \cdot 1 \, d\lambda \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 = \|f\|_2 \cdot (\lambda(X))^{1/2} < \infty$$

Con esto, $\forall f \in L^2(\lambda)$, $f \in L^1(\nu)$. Con ello ϕ es lineal.

Aparte es continua, pues:
$$|\phi(f)| = \left| \int f \, d\nu \right| \leq \|f\|_{L^2(\nu)} \cdot (\nu(X))^{1/2} < \infty$$

i.e., $\exists K \, (= (\nu(X))^{1/2}) > 0$ tq $|\phi(f)| \leq K \|f\|_2$.

Esto es, tiene norma de operador finita. (para más info, funcional)

Con ello $\phi \in L^2(\lambda)^*$

Con ello, por TRR $\exists ! \, g \in L^2(\lambda)$ tq

$\forall f \in L^2(\lambda)$ $\quad \phi(f) = \int g f \, d\lambda$. pero

$\int g f \, d\lambda = \int g f \, d\nu + \int g f \, d\mu$ si $\int g f \, d\nu < \infty$ podemos restarlo y llegamos (propuesto).

$\Rightarrow \int f g \, d\mu = \phi(f) - \int g f \, d\nu$

$= \int f(1-g) \, d\nu$. con lo que se prueba lo pedido.

c) Ver que $g(x) \in [0,1]$ λ-ctp.

Si no: Sea $M = \{ g > 1 \}$.

$\nu(M) = \int 1\!\!1_M \, d\nu = \phi(1\!\!1_M) = \int 1\!\!1_M g \, d\lambda > \int 1\!\!1_M \, d\lambda$

$\Rightarrow \nu(M) > \nu(M) + \mu(M)$ $\rightarrow\!\!\leftarrow$

- $g \geq 0$ ctp es similar: Sea $M = \{ g < 0 \}$.

$\nu(M) = \int 1\!\!1_M \, d\nu = \phi(1\!\!1_M) = \int 1\!\!1_M g \, d\lambda < 0$ $\rightarrow\!\!\leftarrow$

Ahora $A := \{ g < 1 \}$ $\quad S := \{ g = 1 \}$. Definimos sobre $\mathcal{F}$.

$\nu_1(B) := \nu(A \cap B)$; $\nu_2(B) := \nu(S \cap B)$.

d) Pruebe $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$. Concluya la versión finita de Lebesgue.

Claramente: $\nu(F) = \nu((F \cap A) \cup (F \cap S) \cup (F \cap (A \cup S)^c))$
① ② ③

por c) $\nu(③) = 0$ pues $\nu \ll \lambda$.

$\Rightarrow \quad \nu(F) = \nu(F \cap A) + \nu(F \cap S) := \nu_1(F) + \nu_2(F)$.

Ahora veamos $\nu_1 \ll \mu$. sea N tq $\mu(N) = 0$.

$\nu_1(N) = \nu(A \cap N) = \int \mathbb{1}_{A \cap N} \, d\nu = \phi(\mathbb{1}_{A \cap N}) = \int \mathbb{1}_{A \cap N} \rho \, d\lambda$

$= \int \underbrace{\mathbb{1}_{A \cap N} \rho}_{=0 \text{ ctp}} \, d\mu + \int \mathbb{1}_{A \cap N} \rho \, d\nu$. Con esto

$\mu(A \cap N) \leq \mu(N) = 0$.

$\Rightarrow \quad \nu_1(N) = \int \mathbb{1}_{A \cap N} \, d\nu = \int \mathbb{1}_{A \cap N} \rho \, d\nu$.

$\Rightarrow \int \mathbb{1}_{A \cap N} (1 - \rho) \, d\nu = 0$ pero $1 - \rho > 0$ en $A \cap N$

$\Rightarrow \quad \mathbb{1}_{A \cap N} = 0 \quad \nu\text{-ctp} \quad \Rightarrow \quad \nu(A \cap N) = 0 \iff \nu_1(N) = 0$.

Veamos ahora $\nu_2 \perp \mu$. En efecto: basta probar $\mu(S) = 0$. pues ν_2 soporta en S:

$\mu(S) = \int \mathbb{1}_S \, d\mu = \int \mathbb{1}_S \cdot 1 \, d\mu \overset{\rho = 1 \text{ en } S}{=} \int \mathbb{1}_S \cdot \rho \, d\tau$

$= \int \mathbb{1}_S \underbrace{(1 - \rho)}_{0 \text{ en } S} \, d\nu = 0$

$\downarrow$
0

Prop: chequear unicidad.

e) Probar $\exists h \in \mathcal{M}_+$ tq $\quad \nu_1(B) = \int_B h \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{F}$.

Vemos que, en efecto:

$$\nu_1(B) = \int \mathbb{1}_{A \cap B} \, d\nu = \int \mathbb{1}_{A \cap B} \cdot \frac{(1-g)}{(1-g)} \, d\nu$$

$\rightarrow$ en A, $g < 1$.

$$\overset{(d)}{=} \int \mathbb{1}_{A \cap B} \cdot \frac{g}{1-g} \, d\mu \qquad \text{i.e.} \qquad h = \frac{\mathbb{1}_{A \cap B} \; g}{1-g}$$ cumple lo pedido

Vemos unicidad. Si hay 2

$$\forall B \in \mathcal{F} \int_B h \, d\mu = \int_B h' \, d\mu \Rightarrow h = h' \; \mu\text{-c.s.}$$

P2) Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$, $(Y,\mathcal{G},\nu)$ σ-finitos. $K: X\times Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$-medible

Tal que: $\exists C>0$ tq

$$\int_X |K(x,y)|\, d\mu(x) \le C \quad \nu\text{-c.s.}$$

$$\int_Y |K(x,y)|\, d\nu(y) \le C \quad \mu\text{-c.s.}$$

Definimos: $T: L^p(\nu) \to L^p(\mu)$

para $p\in(1,\infty)$ $\quad f \longmapsto Tf(x) := \int_Y K(x,y)\, f(y)\, d\nu$

a) Probar $\forall f\in L^p(\nu)$ $Tf(x)$ converge absolutamente μ-c.s.

Esto es pdq: (μ-c.s.) $\int_Y |K(x,y)\cdot f(y)|\, d\nu < \infty$. En efecto: Sea q el conjugado de p.

$$\int_Y |K(x,y) f(y)|\, d\nu = \int_Y |K(x,y)|^{1/p}\cdot |K(x,y)|^{1/q} \left(|f(y)|^p\right)^{1/p} d\nu$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int \left(|K(x,y)|^{1/q}\right)^q d\nu\right)^{1/q} \left(\int \left(|K(x,y)|^{1/p}\cdot\left(|f(y)|^p\right)^{1/p}\right)^p d\nu\right)^{1/p} = \underbrace{\left(\int |K(x,y)|\, d\nu\right)^{1/q}}_{\le C^{1/q}} \left(\int |K(x,y)|\cdot|f(y)|^p d\nu\right)^{1/p}$$

Es decir:

$$\int_Y |K(x,y)||f(y)|\, d\nu \le C^{1/q} \left(\int_Y |K(x,y)||f(y)|^p\, d\nu\right)^{1/p}.$$

Por lo que basta probar

$$\underbrace{\int_Y |K(x,y)|\cdot|f(y)|^p\, d\nu}_{\Phi(x)} < \infty \quad \mu\text{ c.s.}$$

En particular, probaremos $\int_X \Phi(x)\, d\mu < \infty$ usando Fubini-Tonelli.

En efecto:

$$\int_X \Phi(x)\, d\mu := \int_X \int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^p\, d\nu\, d\mu$$ donde μ, ν son σ-finitas y el integrando es ≥ 0 medible.

$$\Rightarrow = \int_Y \int_X |K(x,y)|\,|f(y)|^p\, d\mu\, d\nu = \int_Y |f(y)|^p \cdot \underbrace{\int_X |K(x,y)|\, d\mu}_{\leq C \ \nu\text{-ctp.}}\, d\nu$$

$$\leq \int_Y |f(y)|^p \cdot C\, d\nu = C \cdot \int_Y |f(y)|^p d\nu = C \cdot \|f\|_p^p < \infty$$ pues $f \in L^p(\nu)$.

con esto, $\Phi(x) < \infty$ μ-c.s. con lo que probamos lo pedido.

b) Pruebe T bien definida, lineal, y continua.

En efecto, probamos que $\forall f$ $Tf \in L^p(\mu)$.

$$\|Tf\|_{L^p(\mu)}^p = \int_X |Tf(x)|^p d\mu = \int_X \left| \int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu \right|^p d\mu$$

$$\leq \int_X \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\nu \right)^p d\mu \underset{a)}{\leq} \int_X C^{p/q} \int |K(x,y)|\,|f(y)|^p d\nu\, d\mu$$

$$= C^{p/q} \int_X \int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|^p d\nu\, d\mu \underset{a)}{\leq} \underbrace{C^{p/q} C}_{C'} \|f\|_p^p < \infty$$

con ello, T está bien definida.

Como probamos que $\forall f \in L^p(\nu)$ $K(x,\cdot)\cdot f(\cdot) \in L^p(\nu)$.

$T(f+\lambda g) = \int K(x,y)\cdot(f(y)+\lambda g(y))\, d\nu = Tf + \lambda Tg$ → pues las integr existen.

Como vimos, Además: $\forall f \in L^p(\nu)$

$\|Tf\|_p \leq C' \cdot \|f\|_p$. es decir $\|T\| \leq C' < \infty$

con lo que T es continua y se termina