PAUTA AUX #7

P1) Consideremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (si no la def de A.C. pierde sentido) Lipschitz.

f Lipschitz $\Leftrightarrow$ $\exists K > 0$ tq $\forall x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| < K \cdot |x - y|$$

Ocuparemos esto para demostrar absoluta continuidad.

Sea entonces $\{(a_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una colección numerable de intervalos disjuntos contenidos en $[a,b]$.

- Nos interesa imponer alguna cota δ sobre el largo total del intervalo (δ que podemos manipular a voluntad), que nos permita controlar la variación de f sobre esta colección. Entonces:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \sum_{n \in \mathbb{N}} K |b_n - a_n| \quad \text{por Lipschitz}$$

$$= K \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n|. \quad \text{con ello: } \leadsto$$

- Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \; (= \delta)$ llegamos a lo buscado.

Así, f es A.C. y probamos lo pedido $\blacksquare$

P2) Tenemos $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ tq

$\forall s < t \in [0,1]$

$$|f(t) - f(s)| \leq \int_s^t g \, d\lambda$$

con $g \in L^1$ $g \geq 0$

Probaremos f de V.A., para esto, basta ver que es A.C. ↳ por def. también sale. Propuesto.

En efecto, comencemos con una cantidad finita de intervalos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} g \, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{(a_i,b_i)} g \, d\lambda = \int_0^1 g \, \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i=1}^N (a_i,b_i)} \, d\lambda$$

luego si $N \to \infty$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \underbrace{\lim_{N \to \infty} \int_0^1 g \cdot \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i=1}^N (a_i,b_i)} \, d\lambda}_{A}$$

Nos interesa usar TCM sobre A

en efecto $\forall N$ $g \cdot \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i=1}^N (a_i,b_i)} \leq g$ integrable positiva

y $g \cdot \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i=1}^N (a_i,b_i)} \xrightarrow[\text{puntual}]{} g \, \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} (a_i,b_i)}$ $(\in L^1)$.

Luego, podemos usar TCM:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \int_0^1 g \, \mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} (a_i,b_i)} \, d\lambda$$

$$= \int_{\mathcal{O}} g \, d\lambda.$$

Ahora, como $\{g\}$ es UI, entonces: $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0$ tq

$$\lambda\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} (a_i, b_i)\right) < \delta \Rightarrow \int_{\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty}} g \, d\lambda < \varepsilon$$

y como estamos con λ la medida de Lebesgue

$$\lambda\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} (a_i, b_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|$$

tomando el δ dado por U.I.

Esto, por def, nos da la def. de A.C. luego, es de V.A., Así, probamos lo pedido

$\boxed{P3}$ PDQ

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un X en L^p $\Leftrightarrow$ $\{|X_n|^p\}_{n\in\mathbb{N}}$ es U.I. y converge en probabilidad.

$\boxed{\Rightarrow}$ convergencia L^p $\Rightarrow$ Cauchy L^p $\Rightarrow$ Cauchy en probabilidad

$\Rightarrow$ convergente en probabilidad. (resultados conocidos).

Sea X su límite en $\mathbb{P}$, es L^p por Fatou.

Veamos Uniforme Integrabilidad, para esto veremos:

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| |X_n|^p \|_1 < \infty$

(2) $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n \, d\mathbb{P} \to 0$.

Para (1): Sea $\varepsilon > 0$ N tq $\forall n, m \geq N$

$$\int |X_n - X_m| \, d\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{2} \longrightarrow \text{Cauchy en } L^p.$$

Sea $n \geq N$, vemos que:

$$\int |X_n|^p \, d\mathbb{P} = \int |X_n - X_N + X_N|^p \, d\mathbb{P} \leq \int |X_N|^p d\mathbb{P} + \int |X_n - X_N|^p d\mathbb{P}$$

$$\leq \int |X_N| + \frac{\varepsilon}{2}$$ es decir:

$$\underbrace{(\|X_n\|_p)^p}_{\text{Depende de } n} \leq \underbrace{\|X_N\|_p^p}_{\text{depende de } N} + \frac{\varepsilon}{2}$$ | tomamos $\sup_{n \in \mathbb{N}} (\ )$

$$\Rightarrow \sup_{n \geq N} \|X_n\|_p^p \leq \|X_N\|_p^p + \frac{\varepsilon}{2}$$ | tomamos $\sup_{k \leq N} (\ )$

$$\rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p^p \leq \underbrace{\sup_{k \leq N} \|X_k\|_p^p}_{\text{sobre una cantidad finita, donde todo } X_k \text{ es } L^p.} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_p^p < \infty$$ con ello, tenemos 1

2 PDQ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $\mathbb{P}(E) < \delta$

$$\Rightarrow \int_E |X_n|^p \, d\mathbb{P} < \varepsilon$$

Procedemos por contradicción. Si no fuese así, tendríamos que:

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0 \ \exists A$ con $\mathbb{P}(A) < \delta$ y $n \in \mathbb{N}$

y $$\int_A |X_n|^p \, d\mathbb{P} > \varepsilon$$

En particular consideremos $\delta_m = 2^{-m}$, A_m con $\mathbb{P}(A_m) < \delta_m$, y n_m con $\int_{A_m} |X_{n_m}|^p d\mathbb{P} \geq \varepsilon$.

Definimos $B_k := \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m$

Vemos que para $m \geq k$:

$$\varepsilon < \int_{A_m} |X_{n_m}|^p dP \leq \int_{B_k} |X_{n_m}|^p dP$$ → Nos quitamos la dependencia de m abajo

Si $m \to \infty$, como convergencia L^p ⇒ convergencia de las integrales:

$$\Rightarrow \varepsilon \leq \int_{B_k} |X|^p dP$$

Ahora, si $k \to \infty$, $P(B_k) \leq \sum_{n \geq k} P(A_n) \leq \sum_{n \geq k} 2^{-n} \longrightarrow 0$ i.e. $\mu(B_k) \to 0$

Con ello: $\varepsilon \leq \int_{B_k} |X|^p dP \xrightarrow[TCM]{} 0$ $\rightarrow\!\!\!\!\!/$

Así, probamos (2) y se concluye

$\boxed{\Leftarrow}$ $|X_n|^p \xrightarrow{P} X \Rightarrow \exists$ subsuc n_k t.q. $|X_{n_k}|^p \xrightarrow{c.t.p.} |X|$.

Con ello:

$$\int |X|^p dP = \int \lim_k |X_{n_k}|^p dP = \int \liminf_k |X_{n_k}|^p dP$$

$$\underset{\text{FATOU}}{\leq} \liminf_k \int |X_{n_k}|^p dP \leq \sup_n \int |X_n|^p dP < \infty$$ pues $|X_n|^p$ es U.I.

Con ello, estudiamos $\|X_n - X\|_p^p$.

Sea $A_\varepsilon^n := \{ |X_n - X|^p > \varepsilon \}$

$$\int |X_n - X|^p dP = \int_{A_\varepsilon^n} |X_n - X|^p dP + \int_{(A_\varepsilon^n)^c} |X_n - X|^p dP$$

$$\leq \int_{(A_\varepsilon^n)^c} |X_n - X|^p \, d\mathbb{P} + \int_{A_\varepsilon^n} |X|^p \, d\mathbb{P} + \int_{A_\varepsilon^n} |X_n|^p \, d\mathbb{P}$$

$\quad (1) \qquad\qquad (2) \qquad\qquad (3)$

(1) $\leq \varepsilon$ por def de A_ε^n

(2) Como $|X|^p \in L^1$ tenemos que para n grande

$$\int_{A_\varepsilon^n} |X|^p \, d\mathbb{P} \leq \varepsilon \quad \text{pues } |X_n| \xrightarrow{p} X \text{ en } \mathbb{P}, \text{ i.e.}$$

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon^n) \longrightarrow 0$$

(3) Como $|X_n|^p \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ y $|X_n|^p$ UI

Para n grande $\mathbb{P}(A_\varepsilon^n)$ es tan chico como quiera, con ello, por U.I., puedo tenerlo tan chico que

$$\int_{A_\varepsilon^n} |X_n|^p \, d\mathbb{P} < \varepsilon$$

Así: $\int |X - X_n|^p \, d\mathbb{P} < 3 \cdot \varepsilon$

con ello $\{X_n\}_n$ converge a X en L^p.

Así, se concluye lo pedido.

P4

a) Por definición:

$\tilde{\mathbb{P}}_X(A) = \tilde{\mathbb{P}}(\{X \in A\})$ donde $X \underset{\tilde{\mathbb{P}}}{\sim} N(0,1)$

y como aprendimos en proba ♥ esto es:

$$\tilde{\mathbb{P}}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underbrace{d\lambda(x)}_{dx}$$

dx pero en notación de medida.

Como sabemos:

$$\lambda(A) = 0 \Rightarrow \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) d\lambda(x) = 0$$

esto es: $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_X(A) = 0$

con lo que, por definición, $\tilde{\mathbb{P}}_X \ll \lambda$

Para $\mathbb{P}_X$, el razonamiento es exactamente el mismo.

Para las derivadas de R-N:

$\tilde{\mathbb{P}}_X$: buscamos g tq

$$\tilde{\mathbb{P}}_X(A) = \int_A g \, d\lambda$$

pero como sabemos de proba:

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

cumple lo buscado, por lo que se puede tomar:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_X}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

Bajo el mismo razonamiento:

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda} = \exp(-x) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

b) ¿ $\tilde{\mathbb{P}}_X \ll \mathbb{P}_X$? notemos

$\mathbb{P}_X((-2,-1)) = 0$ pues un exponencial no toma valores negativos.

Sin embargo

$$\tilde{\mathbb{P}}_X((-2,-1)) = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx > 0.$$

$\Rightarrow$ No es cierto que $\tilde{\mathbb{P}}_X \ll \mathbb{P}_X$.

¿ $\mathbb{P}_X \ll \tilde{\mathbb{P}}_X$? Notemos que:

$$\tilde{\mathbb{P}}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = 0 \iff \lambda(A) = 0$$

(pues $\frac{\mathbb{1}_A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \geq 0$, i.e., integra 0 sólo si es 0 c.t.p.).

Así:

a) : $\mathbb{P}_X \ll \lambda$

$\tilde{\mathbb{P}}_X(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}_X(A) = 0$

notar, esto es $\ll \tilde{\mathbb{P}}_X$

Así:

$\mathbb{P}_X \ll \tilde{\mathbb{P}}_X$ y se termina

c) calculemos $\frac{d\mathbb{P}_X}{d\tilde{\mathbb{P}}_X}$. en efecto, por Aux 6

derivada de R-N inversa.

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\tilde{\mathbb{P}}_X} = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tilde{\mathbb{P}}_X} = \frac{d\mathbb{P}_X}{d\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\frac{d\tilde{\mathbb{P}}_X}{d\lambda}}\right)$$

regla de la cadena de R-N

$$= \exp(-x) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}^{x} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$