PAUTA P1 C1

P1) a) Notemos que basta probar $\nu(\{1\}) = 0$ pues

sea $x \in \mathbb{R}$ $\nu(\{x\}) = \nu(x\{1\}) = |x| \cdot \nu(\{1\})$.

Con esto en mente si $\nu(\{1\}) \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \nu(\{\tfrac{1}{n}\}) = \frac{\nu(\{1\})}{n} > 0$$

con ello:

$$\nu(\{\tfrac{1}{n}\}_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\{\tfrac{1}{n}\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\{1\}) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \underbrace{\nu(\{1\}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{infinito}} \leq \nu([0,1]) < \infty$$

Así $\nu(\{1\}) = 0$ y se concluye.

b) Ocuparemos teo. de Hahn. Probaremos que

$\nu|_S = c \cdot \lambda|_S$ con $S = \{[a,b),\ a \leq b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \phi\}$

En efecto

se tiene en $\mathbb{R}, \phi$ claramente:

$\nu(\phi) = 0 = c \cdot \lambda(\phi)$, $\nu(\mathbb{R}) \geq \nu([0,n])$

$= n \cdot \nu([0,1])$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\nu(\mathbb{R}) = \infty^+ = c \cdot \lambda(\mathbb{R})$

sea $b \geq 0$:

$$\nu([0,b)) = \nu(b \cdot [0,1)) = b \cdot \nu([0,1)) \overset{\text{por a)}}{=} b \cdot \nu([0,1])$$

$$= (b-0) \cdot c = \lambda([0,b)) \cdot c$$

sea $a \leq 0$:

$$\nu([a,0)) = \nu(a \cdot (0,1]) = |a| \cdot \nu((0,1])$$

$$= (0-a) \cdot \nu([0,1]) = \lambda([0,a)) \cdot c$$

$\hookrightarrow$ a).

Sea $a < 0 < b$:

$\nu([a,b)) = \nu([a,0)) + \nu([0,b)) = -a \cdot C + b \cdot C$

$= C \cdot (b-a) = C \cdot \lambda([a,b))$

casos anteriores

si $0 \leq a < b$:

$\nu([a,b)) = \nu([0,b) \setminus (0,a))$ con $(0,a) \subseteq [0,b)$

$= \nu([0,b)) - \nu((0,a)) = (b-a) \cdot C$

↳ casos anteriores + (a)

si $a < b \leq 0$:

$\nu([a,b)) = \nu([a,0) \setminus [b,0))$ y sigue análogo al otro caso.

En rigor no es necesario hacer estos 5 casos explícitamente pero se debe llegar a que se tiene para TODO intervalo semiabierto o no hay puntaje completo

Con ello, viendo que coinciden en S y notando σ-finitud (λ se tiene y en ν sale del cubrimiento $[-n,n)$, por ejemplo). Por Hahn se obtiene lo pedido.