Pauta Auxiliar #5 Medida

P1 a) Procedemos por doble implicancia:

$\boxed{\Leftarrow}$ Directo: si $a = b^{q-1}$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{b^{(q-1)\cdot p}}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (*) \text{ y:}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{q}{p} + 1 = q \iff q - 1 = \frac{q}{p}$$

Luego: $(*) = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} = b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = b^q$

pero: $b^q = b \cdot b^{q-1} = a \cdot b$ //

$\boxed{\Rightarrow}$ Sean a, b tq $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = ab$ PDQ $a = b^{q-1}$

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{q a^p + b^q p}{pq} \quad (**)$$

Notemos: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \frac{p+q}{pq} \to p + q = pq$

$$(**) = \frac{q a^p + b^q \cdot p}{p+q} \to p + q = \frac{q a^p + b^q p}{ab}$$

$$= q \cdot \frac{a^{p-1}}{b} + p \frac{b^{q-1}}{a} \Rightarrow q\left(\frac{a^{p-1}}{b} - 1\right) = p\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right)$$

Acá ahora tratamos de "forzar" el Hint evaluado en $\frac{b^{q-1}}{a}$ o $\frac{a}{b^{q-1}}$.

$$\iff \left(\frac{a^{p-1}}{b} - 1\right) = \frac{p}{q}\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right) \quad \text{y} \quad \frac{p}{q} = p - 1$$

$\to$ tratamos de hacerlo aparecer acá

$$\iff \left(\frac{a^{p-1}}{b} - 1\right) = (1-p)\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right)$$

$$\iff \left(\left(\frac{b}{a^{p-1}}\right)^{-1} - 1\right) = (1-p)\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right)$$

y: $b^1 = b^{\frac{1-p}{1-p}} = b^{\frac{1}{1-p}\cdot(1-p)}$ y: $1 - p = \frac{-p}{q} \iff \frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$

pero $\frac{q}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{q}{p} = q - 1$

Con esto:

$$\left(\left(\frac{b^{q-1}}{a}\right)^{1-p}-1\right) = (p-1)\left(1-\frac{b^{q-1}}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1-\left(\frac{b^{q-1}}{a}\right)^{1-p}\right) + (p-1)\left(1-\frac{b^{q-1}}{a}\right) \rightarrow \text{El hint}$$

Luego si probamos el hint obtenemos que

$\frac{b^{q-1}}{a} = 1$ i.e. $a = b^{q-1}$ y se concluye.

Dem hint:

Primero notemos que $f(1)$ es 0 efectivamente

Además:

$$f'(x) = (p-1)\cdot x^{-p} - (p-1)$$

evaluando: $f'(1) = 0$. A su vez:

$$f''(x) = -p\cdot(p-1)\cdot x^{-p-1} < 0$$

Con esto f es cóncava, i.e., 1 es mínimo global

Luego es el único cero.

Con eso: $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = ab \Rightarrow a = b^{q-1}$ y probamos lo pedido

b) Calculemos c: Suponiendo $g = c\ \mathrm{sgn}(f)|f|^{p-1}$

entonces: como $g \in L^q$

$$\|g\|_q^q = \int |g|^q = \int c^q |f|^{qp-q} = c^q \int f^{(p-1)\cdot q}$$

y como vimos: $p-1 = \frac{p}{q}$ Luego:

$$\|g\|_q^q = c^q \int f^p = c^q \cdot \underbrace{\|f\|_p^p}_{\neq 0} < \infty \quad (f \in L^p)$$

pues $f \neq 0 \in L^p$

$\Leftrightarrow c = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p/q}}$ → Esto no se puede imponer pero da intuición.

Probemos lo pedido.

$\boxed{\Leftarrow}$ Directo: $\int fg = \int \underbrace{f \cdot \text{sgn}(f)}_{|f|} \cdot c \cdot |f|^{p-1}$

$= c \cdot \int |f|^p = c \cdot \|f\|_p^p = (\cdots)$ Ahora si c no es lo que encontramos, la prop. no se cumple

Luego, con $c = \dfrac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p/q}}$

$(\cdots) = \|g\|_q \cdot \|f\|_p^{p - \frac{p}{q}}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p - p/q = 1$

$= \|g\|_q \cdot \|f\|_p$ con lo que se prueba lo pedido.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sean $f \in L^p \setminus \{0\}$ $g \in L^q \setminus \{0\}$ tq

$\int fg = \int |f||g| = \|f\|_p \|g\|_q$ esto es equivalente a: * ver comentario al final de la pregunta

$\int \dfrac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \dfrac{|g|}{\|g\|_q} = 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ y como $\int \left(\dfrac{f}{\|f\|_p}\right)^p = \int \left(\dfrac{g}{\|g\|_q}\right)^q = 1$

Obtenemos $\int \dfrac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \dfrac{|g|}{\|g\|_q} = \dfrac{1}{p} \int \left(\dfrac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \dfrac{1}{q} \int \left(\dfrac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q$

$= \int \dfrac{1}{p} \cdot \left(\dfrac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \dfrac{1}{q} \left(\dfrac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q$

Como sabemos (de Young) $\forall x$

$\underbrace{\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}}_{a} \underbrace{\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{b} \leq \dfrac{1}{p} \cdot \left(\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \dfrac{1}{q} \left(\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$

Luego tengo que el lado derecho es mayor o igual que el izq, pero integran lo mismo, luego, son iguales ctp.

Con esto:

$$\frac{|f||g|}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q \quad \text{ctp}$$

y de a) sabemos que esta igualdad es equivalente a, ctp:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^{q-1} \quad \text{i.e.}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \iff q-1 = \frac{q}{p} \iff \frac{p}{q} = \frac{1}{q-1}$

y $\frac{p}{q} = p-1$

$$|g(x)| = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{\frac{1}{q-1}} \cdot \|g\|_q = |f(x)|^{p-1} \cdot \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p-1}}$$

Luego como $|f||g| \geq fg$ pero

$\int fg = \int |f||g| \qquad fg = |f||g|$ ctp.

Con eso $\operatorname{sgn}(g) = \operatorname{sgn}(f)$ ctp.

Así como $|g(x)| = g(x)\operatorname{sgn}(g)(x)$

y $\operatorname{sgn}(g) = \frac{1}{\operatorname{sgn}(g)}$ obtenemos:

$$g(x) = \underbrace{\frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p-1}}}_{c} \cdot \operatorname{sgn}(g) \cdot |f|^{p-1}$$

con lo que probamos lo pedido.

* Comentario: La hipótesis es $\int fg = \|f\|_p \|g\|_q$ pero:

$$\|f\|_p\|g\|_q = \int fg \leq \int |f||g| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q$$

Luego obtenemos que todas son igualdades.

P2 Sea $f \in L^p \cap L^q$ con $1 \leq p < q \leq \infty$, sea $r \in [p,q]$

PDQ $f \in L^r$ i.e. $\int |f|^r < \infty$.

Notemos que los casos $r=p$, $r=q$ son triviales, luego, basta estudiar los casos $r \in (p,q)$

En efecto:

$$\int |f|^r = \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^r + \int_{\{|f|<1\}} |f|^r$$

notando que:

$|f| \geq 1 \Rightarrow |f|^r \leq |f|^q$

$|f| < 1 \Rightarrow |f|^r \leq |f|^p$

obtenemos

$$\leq \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q + \int_{\{|f|<1\}} |f|^p \leq \int |f|^p + \int |f|^q$$

$$= \|f\|_p^p + \|f\|_q^q < \infty \text{ pues } f \in L^p \cap L^q$$

Luego $\|f\|_r^r < \infty$ i.e., $f \in L^r$, con lo que probamos lo pedido.

P2 a) Primero probaremos el hint:

Sean $p, q \in (1, \infty)$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ entonces

$fg \in L^s$ y $\|fg\|_s \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

En efecto: Notemos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{p}{s}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{q}{s}\right)} = 1$

$\|fg\|_s^s = \int |fg|^s = \int |f|^s \cdot |g|^s$ (o) } notemos que

$f \in L^p \Leftrightarrow \int |f|^p < \infty \Leftrightarrow \int |f^s|^{p/s} < \infty$

$\Leftrightarrow |f|^s \in L^{p/s}$ y análogo para ver $g \in L^{q/s}$

Con eso:

$$(o) \underbrace{\leq}_{\text{Hölder}} \||f|^s\|_{p/s} \, \||g|^s\|_{q/s} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Apliquemos esto a nuestro problema:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-\frac{1}{r}=\frac{r-1}{r}=\frac{1}{\left(\frac{r}{r-1}\right)}$$

Podemos aplicar el lema $\left(s=\frac{r}{r-1}\right)$

$$f\cdot g \in L^s \quad y \quad \|fg\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

A su vez $\frac{1}{s}+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$

$\Rightarrow s, r$ son Hölder conjugados

Luego:

Hölder sobre $(fg)\in L^s$ y $h\in L^r$

$$\|(fg)h\|_1 \leq \|fg\|_s \cdot \|h\|_r \underset{\text{Lema } s=\frac{r}{r-1}}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$$

Con lo que probamos lo pedido.

b) Procedemos por inducción

$\boxed{CB}$ $n=1$ directo. $\|f\|_1 \leq \|f\|_1$
($n=2$ también lo tenemos por lema de P3)

$\boxed{HI}$ Supongamos que funciona para algún $n\in\mathbb{N}$

$\boxed{PI}$ Probémoslo para $n+1$, tenemos que:

Sean $p=\frac{p_{n+1}}{p_{n+1}-r}$; $q=\frac{p_{n+1}}{r}$

Son Hölder conjugados, luego por Hölder

$$\| |f_1|^r \cdot \ldots \cdot |f_{n+1}|^r \|_1 \leq \| |f_1|^r \cdot \ldots \cdot |f_n|^r \|_p \cdot \| |f_{n+1}|^r \|_q$$

$$= \| |f_1| \cdot \ldots \cdot |f_n| \|_{pr} \cdot \| f_{n+1} \|_{p_{n+1}}$$

y como $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}-\frac{1}{p_{n+1}} = \frac{p_n - r}{p_n r} = \frac{1}{r\cdot p}$ $\Rightarrow$ Aplicamos H.I y concluimos.