P1) Procedemos por contradicción. Sea $A \in \eta$ (i.e. es μ^*-medible) tal que $\mu^*|_\eta(A) = 0$ y sea $B \subseteq A$ tq $B \notin \eta$.

Esto es por definición que $\exists\, C \in \mathcal{P}(X)$ tq

$$(\star)\quad \mu^*(C) \neq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c)$$

Como $A \in \eta$ (es μ^*-medible) tenemos que:

$$\mu^*(C \cap B) = \mu^*(C \cap B \cap A) + \mu^*(C \cap B \cap A^c)$$

$$\mu^*(C \cap B^c) = \mu(C \cap B^c \cap A) + \mu^*(C \cap B^c \cap A^c)$$

y recordemos $B \subseteq A$ i.e:

- $B^c \cap A = \phi$ · $B \cap A^c = \phi$
- $B^c \cap A^c = A^c$

con esto:

$$\mu^*(C \cap B) = \mu^*(C \cap B \cap A) + \cancel{\mu^*(\phi)}$$

$$\mu^*(C \cap B^c) = \cancel{\mu^*(\phi)} + \mu^*(C \cap A^c)$$

y a su vez como $C \cap B \cap A \subseteq A$ y μ^* es medida exterior

$$\mu^*(C \cap B \cap A) \leq \mu^*(A) = \mu^*|_\eta(A) = 0$$

$$\Rightarrow \mu^*(C \cap B) = 0 \quad y \quad \mu^*(C \cap B^c) = \mu^*(C \cap A^c)$$

Luego $(\star)$ queda $\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A^c)$

pero como A es μ^*-medible tengo:

$$\mu^*(C) = \cancel{\mu^*(C \cap A)} + \mu^*(C \cap A^c) \qquad \rightarrow\!\leftarrow$$

Con lo que probamos lo pedido.

P2 Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e.d.m. A se dice irreducible para μ si

$\mu(A) > 0 \quad \wedge \quad \forall B \in \mathcal{F}, B \subseteq A$, se tiene $\mu(B) \in \{0, \mu(A)\}$

Supongamos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ No tiene irreducibles.

PDQ: $\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} = [0, \mu(X)]$

Sea $c \in (0, \mu(X))$.

a) Sea $\mathcal{C}_c := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) \geq c\}$. Muestre que

$\exists A_0 \in \mathcal{C}_c$ t.q. $\forall A \subseteq A_0$ t.q. $A \in \mathcal{C}_c$: $\mu(A) = \mu(A_0)$.

- Sea $E \subseteq X$ t.q. $\mu(E) > c$

(Por ejemplo $E = X$ basta).

Definimos $\alpha = \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, A \subseteq E, \mu(A) \geq c\}$

El conjunto dado está acotado por abajo $\Rightarrow$ tiene ínfimo

Luego $\alpha \in \mathbb{R}$ está bien definido.

Por la definición de ínfimo, tenemos que

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon$ t.q. $A_\varepsilon \in \mathcal{F}, A_\varepsilon \subseteq E, \mu(A_\varepsilon) \geq c$

y $\mu(A_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon \longrightarrow$ Para cualquier tolerancia "ε" podemos meternos por debajo de ella para acercarnos a α

Con esto sea

$E_1 \subseteq E$ t.q. $E_1 \in \mathcal{F}$, $\mu(E_1) \geq c$

$\mu(E_1) < \alpha + \varepsilon$, con este conjunto, definimos

$\alpha_1 = \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, A \subseteq E_1, \mu(A) \geq c\}$

y en base a eso podemos repetir el proceso para los

$\alpha_n + \frac{1}{n}$

Sean $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los conjuntos obtenidos por este procedimiento.

Luego, definimos $A_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Notemos que los E_k son decrecientes para inclusión ($E_{k+1} \subseteq E_k$).

Luego: $\forall k\in\mathbb{N}$: $\quad \alpha_k \leq \mu(E_k) \leq \alpha_k + \frac{1}{k} \quad (\star)$

Notemos además que α_k es creciente y $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\alpha_k \leq \mu(X).$$

Luego $\exists \alpha_\infty < \infty$ tq. $\alpha_k \nearrow \alpha_\infty$.

A su vez $E_k \searrow A_0$ luego $\mu(E_k) \longrightarrow \mu(A_0)$

Con esto, sea $A \subseteq A_0$, $A \in \mathcal{C}$

$\forall k\in\mathbb{N}$ $\quad A \subseteq E_k$, luego $\alpha_k \leq \mu(A) \leq \alpha_k + \frac{1}{k}$ (♣)

Aplicando $\lim_{k\to\infty}$ a $(\star)$ y a (♣) obtenemos:

$$\alpha_\infty \leq \mu(A) \leq \alpha_\infty \quad \text{y} \quad \alpha_\infty \leq \mu(A_0) \leq \alpha_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \mu(A_0) = \alpha_\infty.$$

Con ello, probamos la existencia del A_0 pedido, pues además $A_0 \in \mathcal{C}$ ya que:

$$A_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{con} \quad E_n \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A_0 \in \mathcal{F}$$

y $\mu(A_0) \geq c$ pues, $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\mu(A_0) = \alpha_\infty \geq \alpha_k = \inf\{\mu(A) : A\in\mathcal{C},\ A\subseteq E_k\}$$

$\geq \inf\{\mu(A) : A\in\mathcal{C}\} \geq c$. por def de $\mathcal{C}$

b) Probar que $\exists B_0 \in \mathcal{F}$ tal que

- $B_0 \subseteq A_0$; $\mu(B_0) \leq C$;
- si $B \in \mathcal{F}$ cumple $B_0 \subseteq B \subseteq A_0$ con $\mu(B) \leq C$ entonces $\mu(B) = \mu(B_0)$.

Haremos una construcción similar. Comenzamos con $F_0 = \emptyset$. Definimos

$\beta_1 := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, F_0 \subseteq A \subseteq A_0, \mu(A) \leq C\}$

Por def de supremo, $\exists F_1 \in \mathcal{F}$ tq $F_0 \subseteq F_1 \subseteq A_0$, $\mu(F_1) \leq C$ y

$$\mu(F_1) \geq \beta_1 - 1$$

Seguimos inductivamente, definiendo

$\beta_k := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, F_{k-1} \subseteq A \subseteq A_0\}$

Por def de supremo $\exists F_k \in \mathcal{F}$ tq $F_{k-1} \subseteq F_k \subseteq A_0$ $\mu(F_k) \leq C$ y $\mu(F_k) \geq \beta_k - \frac{1}{k}$.

Notemos β_k es decreciente y $\beta_k \geq 0$ luego $\exists \beta_\infty \geq 0$ tq $\beta_k \to \beta_\infty$.

A su vez sea $B_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, notemos $F_n \nearrow B_0$

~~Tenemos~~ : entonces, que:

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\beta_k - \frac{1}{k} \leq \mu(F_k) \leq \beta_k$ (⊗)

Sea además $B \in \mathcal{F}$ tq $B_0 \subseteq B \subseteq A_0$, $\mu(B) \leq C$

Tenemos que $B_k \subseteq B \subseteq A_0$, luego por def de β_k $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\mu(B) \leq \beta_k$$

A su vez: $\mu(B) \geq \mu(B_k) \geq \beta_k - \frac{1}{k}$

Luego:

$$(\blacksquare)\quad \beta_k - \frac{1}{k} \leq \mu(B) \leq \beta_k$$

Aplicando $\lim_{k\to\infty}$ en $(\bullet)$ y $(\blacksquare)$ obtenemos:

$$\beta_\infty \leq \mu(B_0) \leq \beta_\infty \quad y \quad \beta_\infty \leq \mu(B) \leq \beta_\infty$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(B_0) = \beta_\infty$$

$\forall B \in \mathcal{F}$ tq $\mu(B) \leq c$ y $B_0 \subseteq B \subseteq A_0$

Luego el B_0 que construimos es el pedido.

c) Pruebe que $\mu(A_0 \setminus B_0) > 0 \Rightarrow A_0 \setminus B_0$ es irreducible.

Notemos $\mu(A_0 \setminus B_0) = \mu(A_0) - \mu(B_0) = \alpha_\infty - \beta_\infty$ pues $B_0 \subseteq A_0$.

Si $\mu(A_0 \setminus B_0) > 0$, entonces debe ser irreducible, pues:

Si no fuese el caso: sea $D \subseteq A_0 \setminus B_0$, $D \in \mathcal{F}$ tq

$$0 < \mu(D) < \mu(A_0 \setminus B_0)$$

Consideremos el conjunto $B_0 \cup D$, hay 2 casos:

(i) $\mu(B_0 \cup D) \leq c$; (ii) $\mu(B_0 \cup D) > c$

En el primer caso, tenemos que, $\forall k$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ F_k \subseteq B_0 \cup D \subseteq A_0 \\ \cdot\ B_0 \cup D \in \mathcal{F} \\ \cdot\ \mu(B_0 \cup D) \leq c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu(B_0 \cup D) \leq \beta_k \\ \Rightarrow \mu(B_0 \cup D) \leq \beta_\infty \end{array}$$

pues, recordemos, $\beta_k := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{F},\ F_k \subseteq A \subseteq A_0,\ \mu(A) \leq c\}$

Pero $\mu(B_0 \dot\cup D) > \mu(B_0) = \beta_\infty$; ✓

$\Rightarrow \mu(B_0 \dot\cup D) > \beta_\infty$ $\xrightarrow{}$

En el caso (iii): $\mu(B_0 \dot\cup D) > c$

Luego, notemos que $\forall k \in \mathbb{N}$

- $B_0 \dot\cup D \in \mathcal{F}$
- $\mu(B_0 \dot\cup D) \geq c$
- $B_0 \dot\cup D \subseteq E_k$

$\Big\}$ $\alpha_k \leq \mu(B_0 \dot\cup D)$

$\Rightarrow \alpha_\infty \leq \mu(B_0 \dot\cup D)$

Pues $\alpha_k = \inf \{\mu(A) : A \in \mathcal{F}, A \subseteq E_k, \mu(A) \geq c\}$

Sin embargo, vemos que, también:

$\mu(B_0 \dot\cup D) < \mu(A_0) = \alpha_\infty$

$\Rightarrow \mu(B_0 \dot\cup D) < \alpha_\infty$

Luego, la única posibilidad es que $\mu(A_0 \setminus B_0) = 0$

Luego $\alpha_\infty = \mu(A_0) = \mu(B_0) = \beta_\infty$

pero $c \leq \alpha_\infty = \beta_\infty \leq c \Rightarrow \mu(A_0) = \mu(B_0) = c$

d) Concluya.

Vimos que $\forall c \in (0, \mu(X))$ $\exists A_0 \in \mathcal{F}$ tq $\mu(A_0) = c$

Luego, notando que $\mu(\phi) = 0$; $\mu(X) = \mu(X)$.

Tenemos $\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} \supseteq [0, \mu(X)]$

Luego notando que la otra inclusión es directa, obtenemos:

$$\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} = [0, \mu(X)]$$

Con lo que probamos lo pedido.

P3] Vamos a seguir la filosofía de armar la familia de todos los conjuntos que cumplen:

$$\Sigma := \{ B \in \mathcal{B} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists F, U \text{ para } B \}.$$

Sea $\mathcal{C} := \{ C \subseteq X \mid C \text{ cerrado} \}$.

Veamos que $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$

En efecto sea $B \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$. Tomemos $F = B$ y para

y: $U_n := \{ x \in X : d(x, B) < \frac{1}{n} \}$

Claramente $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = B$ y $U_{n+1} \subseteq U_n$

Así: $U_n \setminus B \searrow \emptyset$ con lo que por continuidad de la medida:

$\mu(U_n \setminus B) \searrow \mu(\emptyset) = 0$

En particular $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\mu(U_N \setminus B) < \varepsilon$

con lo que todo cerrado cumple la prop.

Ahora $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$. con lo que si Σ es σ-Algebra obtenemos

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\Sigma) = \Sigma \subseteq \mathcal{B}$$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \Sigma$ y probaríamos lo pedido.

PDQ Σ es σ-Álgebra:

1) $\emptyset \in \Sigma$ directo. ($\emptyset \in \mathcal{C}$)

2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$ en efecto, sea $\varepsilon > 0$

Sean los U, F dados para A para $\varepsilon > 0$, tomamos U^c cerrado F^c abierto:

pues $\mu(F^c \setminus A^c) = \mu(F^c \cap A) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon$

y $F \subseteq A \subseteq U \Rightarrow F^c \supseteq A^c \supseteq U^c$

con lo que $A^c \in \Sigma$

3) Sean $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$. Veamos $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

En efecto: sea $\varepsilon > 0$.

Sabemos que $\forall A_n \; \exists \; U_n$ abierto, F_n cerrado tales que

$$F_n \subseteq A_n \subseteq U_n \quad \text{y} \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

¿por qué esto y no ε?

Tomemos $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$

U es abierto y $A \subseteq U$

Sea ahora $N \in \mathbb{N}$ tq $\mu(\bigcup_{n \geq N} U_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Que existe pues $\mu(\bigcup_{n \geq N} U_n) \to 0$ por continuidad de la medida

revisar esto.

y sea $F = \bigcup_{n=0}^{N-1} F_n$ } La unión debe ser finita para que dé cerrado.

Así: $F \subseteq A \subseteq U$. Veamos lo otro

F cerrado, U abierto.

En efecto:

$$\mu(U \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus F)\right)$$

Notemos $F_n \subseteq F \Rightarrow U_n \setminus F \subseteq U_n \setminus F_n$

$$\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} U_n \setminus F_n \cup \bigcup_{n \geq N} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(U_n \setminus F_n) + \mu\left(\bigcup_{n \geq N} U_n\right)$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ con lo que se prueba lo pedido.

Así $\mathcal{B} = \Sigma$ y se concluye //