Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3402 Estadística
6 de noviembre de 2023

Auxiliar 8: Bayes, riesgo y prior de Jeffreys

Profesor: Joaquín Fontbona.
Auxiliares: Javier Maass, Francisco Muñoz y Diego Olguín.

P1. Recordamos que si $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$, con $\lambda > 0$, su función de densidad masa es:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Y si $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$, su densidad se define para $z > 0$ por:

$$\text{Gamma}(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra de n variables aleatorias i.i.d. con ley Poisson(λ), y $x = (x_1, \ldots, x_n)$ una realización de la muestra.

a) Considerando una distribución a priori $p(\lambda) = \text{HN}(\lambda; \sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\lambda>0}$, demuestre que la distribución a posteriori $p(\lambda|x)$ posee la siguiente forma:

$$p(\lambda|x) \propto \lambda^{\sum x_i} \exp\left\{-n\lambda - \frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right\}$$

b) Consideremos ahora una distribución a priori $p(\lambda) = \text{Gamma}(\lambda; \alpha, \beta)$, con $\alpha, \beta > 0$.

1) **[Propuesto]** Demuestre que la distribución a posteriori $p(\lambda|x)$ está dado por:

$$p(\lambda|x) \sim \text{Gamma}\left(\alpha + \sum x_i, \beta + n\right)$$

2) Describa el comportamiento asintótico para cuando n tiende al infinito.[1]

3) Buscamos el estimador $\hat{\lambda}$ que minimiza

$$J(\delta) = \int_0^\infty (\delta - \lambda)^2 p(\lambda|x) d\lambda$$

Demuestre que

$$\hat{\lambda} = \int_0^\infty \lambda p(\lambda|x) d\lambda$$

4) Determine $\hat{\lambda}_{MAP}$, el estimador máxima a posteriori de λ. Deduzca el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\lambda}_{MLE}$. ¿Qué sucede si n tiende a infinito?

[1] Se sabe que para α grande, la distribución Gamma se aproxima a una distribución normal con media $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ y $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

c) Se define el prior de Jeffreys $\pi(\theta)$ a un prior π tal que

$$\pi(\theta) \propto I(\theta)^{1/2},$$

donde $I(\theta)$ es la matriz de información de Fisher, es decir (bajo ciertas condiciones de regularidad que supondremos verificadas de ahora en adelante):

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial \ln p_\theta(y)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 \ln p_\theta(y)}{\partial \theta^2} \right].$$

1) Determine el prior de Jeffreys $\pi(\lambda)$ para una ley de Poisson(λ).
2) Verifique que el prior así definido no es una densidad de probabilidad.
3) Verifique que, a pesar de ello, se puede determinar una densidad condicional a posteriori $p(\lambda|x_1, \ldots, x_n) = p(\lambda|x)$ correspondiente a este prior. Determine entonces la nueva estimación para esta nueva densidad a posteriori:

$$\tilde{\lambda} = \int_0^\infty \lambda p(\lambda|x) d\lambda.$$