Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3402 Estadística
28 de agosto de 2023

Auxiliar 2: EMV y método de los momentos

Profesor: Joaquín Fontbona.
Auxiliares: Javier Maass, Francisco Muñoz y Diego Olguín.

P1. Considere $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Geom}(p)$ un muestreo aleatorio simple con $0 < p \leq 1$ parámetro desconocido. Recuerde que la función de masa discreta de una $\text{Geom}(p)$ es

$$f(k;p) = (1-p)^{k-1}p, \ \forall k \in \mathbb{N}_*.$$

a) Usando el método de los momentos, construya un estimador para el parámetro p.

b) Calcule ahora el estimador de máxima verosimilitud para p.

P2. Considere $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Unif}[\theta, \theta+1]$ un muestreo aleatorio simple, con $\theta \in \mathbb{R}$ un parámetro desconocido. Muestre que **no existe un único** estimador de máxima verosimilitud, y que en realidad existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_n(\theta) = [\alpha, \beta].$$

P3. Se quiere estimar la población total N de cierta especie animal en un ecosistema. Para esto, se captura primero un número K de individuos, y se marcan. Después de un mes, se captura una cantidad n.

a) Calcule la probabilidad $P_N(k)$ de que en la segunda captura k de los n animales estén marcados.

b) Buscaremos calcular el estimador de máxima verosimilitud de N. Para esto, suponga que k de los n animales de la segunda captura están marcados y demuestre que

$$\frac{P_N(k)}{P_{N-1}(k)} = \frac{(N-K)(N-n)}{N(N-K-n+k)}$$

Y deduzca que $P_N(k)$ es creciente como función de N ssi $N \leq \frac{Kn}{k}$. Concluya el $\hat{N}_{MLE}$ y dé una interpretación de este resultado.

c) Estime la cantidad N de delfines en una región si se marcaron 10 y al mes siguiente 1 de 5 capturados estaban marcados.

P4. Considere $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$ un muestreo aleatorio simple con $k > 0$ y $\lambda > 0$ parámetros desconocidos. La función densidad de una Gamma está dada por[1]:

$$f(x;k,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbb{1}_{x>0}$$

a) Usando el método de los momentos, construya estimadores para los parámetros k y λ.

b) Asumiendo que el número de grados de libertad k es conocido, calcule el estimador de máxima verosimilitud de λ. (ejercicio: investigue cómo se saca la verosimilitud para k).

[1] La función Gamma se define por medio de $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ y cumple con la propiedad de $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}_*$. Es decir, esta corresponde a la generalización del factorial.

P5. [Propuesto] Considere $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Unif}[a, b]$ un muestreo aleatorio simple con $a < b$ parámetros desconocidos. Recuerde que la función de densidad de una $\text{Unif}[a, b]$ es

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{x \in [a,b]}$$

a) Usando el método de los momentos, construya estimadores para los parámetros a y b. ¿Qué sucede si asumimos que $a = 0$?

b) Calcule ahora el estimador de máxima verosimilitud de a y b. ¿Habrá alguna conexión con la P3 del aux. 1?