Departamento de Ingeniería Matemática
MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Patricio Quiroz H.
Auxiliares: Sivert Escaff G.,Anaís Muñoz P., Bruno Skarmeta

Auxiliar 3: Edos elementales y trayectorias

25 de Agosto de 2023

P1. Resuelva las siguiente EDO utilizando el método que estime conveniente.

(a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} - 1$.

(b) $x^2y' + y^2 = xy$.

(c) $(y')^2 = yy''$.

(d) $xy' + y = y^{-2}$.

(e) $y' = y^2 - 12y + 20$

(f) $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$

P2. (a) Considere la ecuación

$$y' + P(x)y = Q(x)y\log(y).$$

Utilice el cambio de variables $v = log(y)$ y encuentre la solución general de la ecuación.

(b) Considere la ecuación diferencial

$$xy' = y + \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},\ y(1) = 0.$$

Derivando con respecto a x y haciendo el cambio de variable $z = y'$ pruebe que

$$x = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}$$

Despejando z de esta expresión, encuentre una EDO de primer orden para y y resuélvala, obteniendo que

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

Indicación: puede serle útil el cambio de variables $w = 1 - x^{2/3}$.

P3. El siguiente es un modelo para la venta esperada de un nuevo teléfono celular:

$$y' = (P_0 - y)(f(t) + \sigma(t)y),$$

donde P_0 (constante) representa la población total de compradores potenciales, y, el número de personas que compra el nuevo teléfono, σ el coeficiente de compra por imitación y f los estímulos publicitarios.

(a) Encuentre una solución **constante** evidente de la ecuación. Reduzca la ecuación a una más simple haciendo un cambio de variables adecuado.

(b) De la forma general de la solución $y(t)$.

(c) Calcule la solución explícitamente si $f(t) = at$, $\sigma(t) = bt$, a, $b > 0$.

P4. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

(i) Utilice el cambio de variable $v = \dfrac{y'}{y}$ para reducir la ecuación a una EDO del tipo Ricatti.

(ii) Justifique por qué para resolver (1) basta con encontrar la solución simultánea de las ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = vy, \ \frac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x).$$

P5. Preguntitas independientes juju

(a) Encuentre trayectorias ortogonales a la familia de curvas dadas por $x^2 - y^2 = 2cx$

(b) Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curva $\sigma_\alpha(x) = \alpha x^5, \alpha \neq 0$

(c) Encontrar las lineas de fuerza del campo eléctrico cuyas curvas equipotenciales están dadas por $cos(y) - \alpha e^{-x} = 0; \alpha \in \mathbb{R}$

Las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza de un campo eléctrico constituyen familias de trayectorias ortogonales.