

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Carlos Conca

Auxiliares: Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy



Auxiliar Extra C3

Pregunta 1. [P1.c 2023 / P3.a 2017]

- a) Demuestre que si $f(z)$ es una función holomorfa, entonces $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ también es holomorfa.
- b) Encuentre todas las funciones reales g , de modo que la función compleja

$$f(x + iy) = x^2 + g(y) + 2|x|yi$$

resulta ser holomorfa en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ lo más grande.

En tal caso, indique los valores de g , Ω y f' .

Pregunta 2. [P2.a 2023 / P2.a 2016]

- a) Sea $S_n(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + nz^n$ y $T_n(z) = z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$

a.1) Demuestre que $S_n(z) = \frac{T_n(z) - nz^{n+1}}{1 - z}$

- a.2) Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$, y utilizando el resultado anterior, calcule la suma de dicha serie.

- b) Encuentre la serie de potencias de la función $h(z) = \frac{1}{2} \log(1 + z^2)$ en torno al punto $z = 0$ e indique su radio de convergencia.

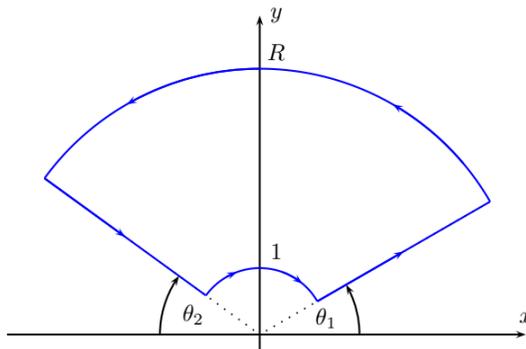
Hint: Estudie $h'(z)$

Pregunta 3. [P1.c 2016 / Otro rectángulo]

- a) Sin utilizar el Teorema de Cauchy-Goursat, verifique que:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 0$$

donde Γ es la curva de la figura recorrida en sentido antihorario.



b) Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = e^{-b^2} \sqrt{\pi} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Hint; Considere la función $f(z) = e^{-z^2} e^{2ibz}$ y la región rectangular de vértices en $-R$, R , $i\tau + R$, $i\tau - R$, con $\tau \neq 0$ a ser fijado de manera conveniente.