MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy

Auxiliar 12: Integración Compleja y Cauchy-Goursat

Pregunta 1. ***[Integrales no muy complejas]***
Calcule las siguientes integrales complejas:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \bar{z}^2\, dz$

b) $\displaystyle\int_{\Gamma} (|z|^2 + \bar{z})\, dz$, *con* Γ *la curva dada por el arco de circunferencia unitaria de* 1 *a* i *en el sentido antihorario.*

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \sqrt{9 - z^2}\, dz$

Pregunta 2. ***[Logaritmo complejo]***
A partir de la rama principal del logaritmo complejo responda:

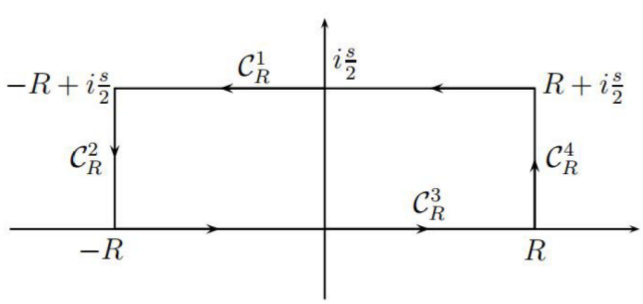
a) Sea $R > 0$. *Muestre que, al orientar* $\partial B(0, R)$ *de forma positiva*

$$\int_{\partial B(0,R)} log(z)\, dz = -2\pi i R$$

b) Dado que $log(z)$ *es holomorfa y que* $\partial B(0, R)$ *es una curva cerrada ¿el valor de la integral encontrada en el ítem anterior contradice el teorema de Cauchy-Goursat?*

Pregunta 3. ***[Godoy C2-2018]***
Considere la función $f(z) = exp(-z^2)$ *y los caminos* $\Gamma_R = \mathcal{C}_R^1 \cup \mathcal{C}_R^2 \cup \mathcal{C}_R^3 \cup \mathcal{C}_R^4$ *para todo* $R > 0$ *(ver figura adjunta). Pruebe, integrando* f *en* Γ_R*, que para* $s > 0$*:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp(-(x + i\frac{s}{2})^2)\, dx = \sqrt{\pi}$$



Hint: Recuerde que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

Definición 1 (Logaritmo complejo)**.** *La rama principal del logaritmo complejo viene dada por la función* $log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$*, definida por*

$$log(z) = ln|z| + i\, arg(z)$$

La cual es holomorfa cuando está restringida a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

Definición 2 (Integral compleja)**.** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y* $\Gamma \subseteq \Omega$ *un camino parametrizado por* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$*. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una funcion continua, se define la integral de* f *sobre* Γ *como:*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\, dt$$

Proposición 1. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *un conjunto abierto y* $\Gamma \subseteq \Omega$ *un camino parametrizado por* $\gamma : [a, b] \to \Omega$*. Entonces* $\forall f \in \mathcal{C}(\Omega)$*,*

$$\left| \int_\Gamma f(z) dz \right| \leq L(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

donde $L(\Gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ *es la longitud del camino* Γ*.*

Definición 3 (Simplemente Conexo)**.** *Dado* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *abierto y conexo por caminos, se dice que es simplemente conexo si todo camino cerrado contenido en* Γ *encierra solo puntos de* Ω*.*

Teorema 1 (Cauchy-Goursat)**.** *Sea* f *una funcion holomorfa,* Ω *abierto, simplemente conexo, y* Γ *una curva cerrada, simple y regular en* Ω*, entonces:*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$