MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy

Auxiliar Extra C2

Pregunta 1. ***[P1 C2 2022]***
Sea $f(x) = e^{tan\lfloor x \rfloor}$ en $0 \leq x \leq 2$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la función piso de x que entrega el mayor entero menor o igual a x. Obtenga la serie en cosenos de f.
Ind: *Puede usar que para $k \geq 1$, $sen((2k-1)\pi/2)$ tiene signo $(-1)^{k+1}$.*
Utilizando este resultado, obtenga, y justifique, el valor de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Pregunta 2. ***[P3 C3 2018]***
Considere el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 1 - cos(2x) + cos(4x), & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

a) Aplicando el método de separación de variables, muestre que las soluciones elementales son de la forma $u_k(x,t) = e^{(1-k^2)t} cos(kx)$, $k \geq 0$.

b) Usando lo anterior y aplicando adecuadamente la condición inicial, concluya que la solución del problema viene dada por $u(x,t) = e^t - e^{-3t} cos(2x) + e^{-15t} cos(4x)$.

Pregunta 3. ***[P1.a) C2 2021]***
Sea $\alpha > 0$. Las vibraciones de una varilla bi-finita se modelan por la ecuación:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= -\alpha^2 u_{xxxx}(x,t) & \forall t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2} & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que la transformada de Fourier de $\frac{1}{1+x^2}$ es $\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$, y asumiendo adicionalmente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t) \right| dx < \infty, \qquad \forall t > 0, \forall k \in \{0,1,2,3,4\},$$

1) Deduzca que la transformada de Fourier de $u(\cdot, t)$ es $\hat{u}(s,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} cos(\alpha s^2 t)$.

2) Concluya que la solución u puede escribirse en forma integral mediante:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|} e^{isx} cos(\alpha s^2 t) ds$$

Pregunta 4. ***[P1.a) C2 2017]***
Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ -1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

a) Calcule la transformada de Fourier de f.

b) Encuentre una función g tal que $\hat{g}(s) = \hat{f}(s)e^{-s^2}$.

Hint: $\widehat{e^{-x^2}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-s^2/4}$