MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy

Auxiliar 9: Método de Separación de Variables

Pregunta 1. ***[♩ Onda, onda. Olha a onda. *clap* *clap* ♪]***
Resuelva la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = sen(x) - 2sen(3x), \quad x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = 3sen(2x), \quad x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Pregunta 2. ***[Un clásico de EDP]***
Considere la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad en \ \Omega,$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *es el cuadrado* $(0,1)^2$*, con las condiciones de borde siguientes:*

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) \quad x \in (0,1) \\ u(1,y) = f_2(y) \quad y \in (0,1) \\ u(x,1) = f_3(x) \quad x \in (0,1) \\ u(0,y) = f_4(y) \quad y \in (0,1) \end{cases}$$

a) Use el principio de superposición para chequear que u se descompone como

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

y encuentre el problema diferencial del cual es solución cada u_i*.*

b) Use separación de variables para resolver una de ellas.

Pregunta 3. ***[Tesouro De Pirata] [Propuesto]***
Resuelva la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in (0,1)^2 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad y \in (0,1) \\ u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1) \\ u_t(x,0) = x(1-x), \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

Método de Separación de Variables

Consideremos una ecuación diferencial parcial con las respectivas condiciones iniciales y de borde, se procede a resolver de la siguiente manera:

(i) Se plantea como solución de la ecuación, $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

(ii) Se reemplaza en la EDP, para obtener una igualdad entre EDO's desacopladas y se igualan a una constante λ. Esto genera dos EDO's, las cuales se resuelven.

(iii) Se estudia la constante λ del problema y se aplican las condiciones de borde, obteniendo una familia numerable de soluciones,

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t), \quad n \in I$$

(iv) Se ocupa el principio de superposición, es decir,

$$u(x,t) = \sum_{n \in I} A_n u_n(x,t)$$

(v) Se aplican el resto de las condiciones, y se busca el valor de la constante A_n utilizando Series de Fourier.