

**MA2002-3,4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones****Profesor:** Carlos Conca**Auxiliares:** Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy, Renzo Aburto, Jesús Sayes**Auxiliar 7: Plano complejo y exponencial****Pregunta 1.** [♣ Te voy a escribir la ecuación más bonita del mundo ♣]

a) Demuestre que la definición vista en clases es equivalente a la de serie de potencias:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

b) Demuestre la llamada “ecuación más bonita de las matemáticas”, que es:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

c) Demuestre la fórmula de Moivre, la cual indica que  $\forall y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos(y) + i \sin(y))^n = \cos(ny) + i \sin(ny)$$

**Pregunta 2.** [Propiedades varias]

Demuestre las siguientes propiedades de la exponencial compleja:

(i)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ .(ii)  $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$ , es decir, es  $2\pi i$ -periódica.(iii)  $\exp(\cdot)$  no tiene ceros.**Pregunta 3.** [Selección Múltiple]Escriba las siguientes funciones de la forma  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , compruebe si son continuas y calcule las derivadas parciales de  $u$  y  $v$ . Comente.a)  $f(z) = z^2 + 3z$ b)  $g(z) = \bar{z}$ c)  $h(z) = \exp(z)$ d)  $j(z) = \operatorname{Re}(z)$ e)  $k(z) = 1/z$ **Pregunta 4.** [Continuará...]Sean  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , además definamos:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  y  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como  $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ .a) Verifique que  $f$  es continua ssi  $g$  es continua.b) ¿Se cumple de igual manera que  $f$  es diferenciable ssi  $g$  es diferenciable?**Hint:** Recuerde las funciones de la P3.

**Definición 1** (Plano complejo). Se define el plano complejo  $\mathbb{C}$  con operaciones  $(+, \cdot)$  como el cuerpo conmutativo  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  con la suma usual de  $\mathbb{R}^2$  y el producto dado por:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Una forma de denotar  $z \in \mathbb{C}$  es de la **forma cartesiana**  $z = x + iy$  donde  $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$  es la parte real de  $z$ ,  $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$  es la parte imaginaria de  $z$  e  $i$  es la **unidad imaginaria** que satisface que  $i^2 = -1$ .

Otra forma de denotar  $z \in \mathbb{C}$  es de la **forma polar**  $z = Re^{i\theta}$  donde  $R = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$  y  $\theta = \arg(z) \in ]-\pi, \pi]$ . Además, dado un complejo  $z = a + ib$  se define su **conjugado**  $\bar{z} = a - ib$  y su **módulo**  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Definición 2** (Topología de  $\mathbb{C}$ ). Dado que el módulo de un número complejo coincide con la norma euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ , entonces la estructura topológica de  $\mathbb{C}$  es la misma que la de  $\mathbb{R}^2$ , esto significa que:

1. Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  se dice **abierto** si para todo punto  $z_0 \in A$  existe un radio  $\rho > 0$  tal que el **disco**:

$$D(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

está contenido en  $A$

2. Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  se dice **cerrado** si su complemento  $A^c = \mathbb{C} \setminus A$  es abierto.
3. Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{C}$  se dice **acotado** si existe un radio  $\rho_0 > 0$  tal que  $A \subseteq D(0, \rho_0)$ .
4. Un conjunto se dice **compacto** si es cerrado y acotado.
5. Una sucesión de números complejos  $z_n = a_n + ib_n$  se dice que **converge** al complejo  $z = a + ib$ , y se escribe  $z_n \rightarrow z$ , si se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$$

o, equivalentemente, si se tiene que  $a_n \rightarrow a$  y  $b_n \rightarrow b$  como sucesiones de números reales.

**Definición 3** (Función continua). Diremos que  $f$  es continua en  $z_0 \in \Omega$  si para toda sucesión  $(z_n)_{n \geq 1} \subseteq \Omega$  tal que  $z_n \rightarrow z_0$  se tiene que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

o de manera equivalente:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0$$

Si lo anterior es cierto para todo  $z_0 \in \Omega$ , decimos simplemente que  $f$  es continua en  $\Omega$  y escribimos  $f \in C(\Omega)$ .

**Definición 4** (Función derivable). Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una función, diremos que  $f$  es derivable en  $z_0 \in \Omega$ , si existe el límite:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

cuyo valor  $f'(z_0)$  lo llamaremos la derivada de  $f$  en  $z_0$ . Además, si  $f$  es derivable en todo  $z_0 \in \Omega$  diremos que es holomorfa en  $\Omega$

**Definición 5** (Exponencial Compleja). Definimos la exponencial compleja de  $z \in \mathbb{C}$ , como:

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$