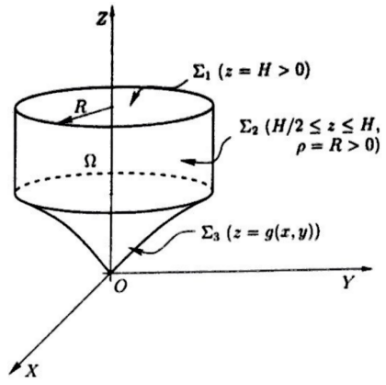
**MA2002-3,4 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Profesor:** Carlos Conca
**Auxiliares:** Fabián Ulloa, Cristóbal Godoy, Renzo Aburto, Jesús Sayes

# Auxiliar 5: Integral de flujo y Teorema de la divergencia

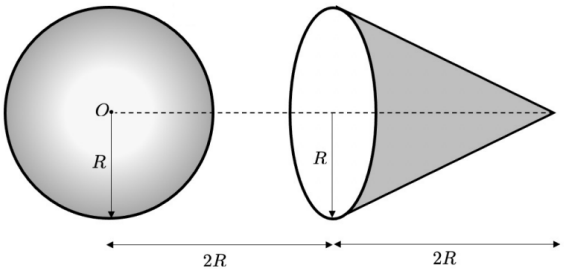
**Pregunta 1.** ***[La consentida]***
*Calcule la integral de flujo del campo* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$*, a través del triangulo de vértices* $(1,0,0)$*,* $(0,2,0)$ *y* $(0,0,3)$*, orientado según la normal exterior.*

**Pregunta 2.** ***[Ay cariño, si supieras]***
*Para la superficie dada por* $z = x^2 + y^2, z \leq 1$*. Calcule,* $\iint_S \frac{x^2}{z} dA$

**Pregunta 3.** ***[El trompo, tiki tiki ti]***
*Calcular el flujo del campo vectorial* $\overrightarrow{F} = (x, 0, -z)$ *en cada una de las superficies* $\Sigma_1$*,* $\Sigma_2$*,* $\Sigma_3$*, cuya reunión es el borde del volumen* $\Omega$ *de la figura. Use para su cálculo la orientación definida por la normal exterior a* $\Omega$*,*




**Pregunta 4.** ***[P1.a) C1 Electro 2021]***
*Una esfera de radio* $R$ *genera un campo eléctrico dado por* $\overrightarrow{E}(r) = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r}$*. Determine el flujo del campo eléctrico a través del manto del cono (superficie gris).*




**Pregunta 5.** ***[Terremoto de Gauss][Propuesto]***
*Sea* $\Omega$ *una región sólida de* $\mathbb{R}^3$ *de borde* $S := \partial\Omega$*. Pruebe utilizando el teorema de Gauss que:*

$$\iint_S rot\,\overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

**Definición 1** (Superficie). *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama superficie si existe una función continua $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S = \{\overrightarrow{\varphi}(u,v) \,|\, (u,v) \in D\}$. La función $\varphi$ se llama parametrización de la superficie. Esta además puede ser:*

- *Suave: $\overrightarrow{\varphi} \in \mathcal{C}^1$*
- *Simple: $\overrightarrow{\varphi}$ es inyectiva.*

**Definición 2** (Vectores Tangente). *Se definen los vectores tangentes a $S$ en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:*

$$\hat{t}_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \Big/ \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|\right| \qquad \hat{t}_v = \frac{\partial\varphi}{\partial v} \Big/ \left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|\right|$$

**Definición 3** (Parametrización y Superficie Regular). *Y se dirá que $\varphi$ es regular si $\hat{t}_u$, $\hat{t}_v$ son linealmente independientes. Además, diremos que una superficie es regular si admite una parametrización $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que es regular en todo punto $(u,v) \in Int(D)$, y que es regular por pedazos si se descompone en una unión finita de superficies regulares.*

**Definición 4** (Vector Normal). *Definimos el vector normal a $S$ en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ como:*

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{||\hat{t}_u \times \hat{t}_v||}$$

*Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u$, $\hat{t}_v$, normal a $\hat{n}$.*

**Definición 5** (Superficie regular orientable). *Diremos que una superficie regular $S$ está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ cuando éste quede bien definido globalmente como una función continua sobre toda la superficie.*

**Definición 6** (Integral de superficie). *Sea $S$ una superficie simple y regular, y $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de esta. Si $\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar continua definida en un abierto $\Omega$ que contiene a $S$, definimos la integral de superficie de $\rho$ sobre $S$:*

$$\iint_S \rho \, dA = \iint_D \rho(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

**Definición 7** (Integral de flujo). *Sean $S$ una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre $S$, y $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto $\Omega$ que contiene a $S$. Definimos la integral de flujo del campo $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie $S$ orientada según $\hat{n}$ mediante:*

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n} \, dA = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left[ \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right] du\, dv$$

*donde $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de $S$ compatible con la orientación, esto es, tal que:*

$$\hat{n} = \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

**Teorema 1** (Gauss). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^1$ sobre un abierto $\mathcal{U} \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces:*

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint_{\Omega} div(\overrightarrow{F}) dV$$