MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Fabián A. Ulloa, Cristóbal Godoy

Auxiliar 3: Operadores Diferenciales en Coordenadas Curvilíneas

Pregunta 1. ***[Cilíndricas]***
A partir de las coordenadas cilíndricas:

a) *Calcule los factores escalares correspondientes* (h_ρ, h_θ, h_z).

b) *Calcule los vectores unitarios* $\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}$. *Verifique que son ortogonales y encuentre el orden positivo.*

c) *Deduzca la fórmula de la divergencia en coordenadas cilíndricas.*

d) *Deduzca la fórmula del rotor en coordenadas cilíndricas.**[Propuesto]***

e) *Calcule la divergencia y rotor del siguiente campo:*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\arctan\left(y/x\right)\right) - \arctan\left(y/x\right)\sin\left(\arctan\left(y/x\right)\right) \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\arctan\left(y/x\right)\right) + \arctan\left(y/x\right)\cos\left(\arctan\left(y/x\right)\right) \\ z \end{pmatrix}$$

Pregunta 2. ***[Esféricas]***

a) *Calcule la divergencia del campo vectorial:*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\hat{k}$$

b) *Sea* $f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{d/2}}$ *un campo escalar en* $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ *y* d *natural.*

i) *Escribir* f *en coordenadas esféricas y calcular* ∇f *en tales coordenadas.*
ii) *Calcular* $\Delta f = div(\nabla f)$.

Pregunta 3. ***[Barbie > Oppenheimer]***
De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial, en coordenadas esféricas:

$$U(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad , con\ K, \alpha \geq 0$$

a) *Encuentre una fuerza* $\overrightarrow{F}$ *tal que* $\overrightarrow{F} = -\nabla U$ *en* $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$

b) *Muestre que* $\Delta U = \alpha^2 U$ *en* $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$

Pregunta 4. ***[Toroidales...?]***
Se definen las coordenadas toroidales (r, φ, θ) *mediante:*

$$x = (R + r\sin(\varphi))\cos\theta, \quad y = (R + r\sin(\varphi))\sin\theta, \quad z = r\cos(\varphi) \quad , con\ r \in [0,R], \varphi, \theta \in [0, 2\pi).$$

a) *Calcule los factores escalares correspondientes y verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal.*

b) *Exprese gradiente, divergencia y rotor en estas coordenadas.**[Propuesto]***

Pregunta 5. ***[Matraca pa la casa][Propuesto]***
Calcule la divergencia y rotor de los siguientes campos:

a) $\overrightarrow{F}(\rho,\theta,z) = 2\frac{cos(\theta)}{\rho^3}\hat{\rho} + \frac{sin(\theta)}{\rho^3}\hat{\theta}$

b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\imath} + (y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2))\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$

c) $\overrightarrow{F}(r,\theta,\varphi) = \frac{\alpha cos(\varphi)}{4\pi r^3}\hat{r} + \frac{\alpha sin(\varphi)}{4\pi r^2}\hat{\varphi}$

Definición 1 (Sistema Ortogonal)**.** *El sistema de coordenadas* $\overrightarrow{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ *con* $(u,v,w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$*, se dice ortogonal si los vectores unitarios del triedro* $\{\hat{u},\hat{v},\hat{w}\}$ *definidos por*

$$\hat{u} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}\Big/\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}\right\|, \quad \hat{v} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}\Big/\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}\right\|, \quad \hat{w} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\Big/\left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right\|.$$

son mutuamente ortogonales para cada $(u,v,w) \in D$*.*

Definición 2 (Factores Escalares)**.** *Dado un sistema de coordenadas ortogonal, definimos sus factores escalares como:*

$$h_u = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}\right\|, \quad h_v = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}\right\|, \quad h_w = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}\right\|.$$

Definición 3 (Coordenadas Cilíndricas)**.** *Se define el sistema de coordenadas cilíndricas dado por:*

$$\overrightarrow{r}(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z), \quad \rho \in [0,+\infty[,\ \theta \in [0,2\pi[,\ z \in \mathbb{R}$$

con factores escalares $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$ *y vectores unitarios:*

$$\hat{\rho} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \quad \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \hat{z} = \hat{k} = (0,0,1).$$

Definición 4 (Coordenadas Esféricas)**.** *Se define el sistema de coordenadas esféricas dado por:*

$$\overrightarrow{r}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi), \quad r \in [0,+\infty[,\ \theta \in [0,2\pi[,\ \varphi \in [0,\pi]$$

con factores escalares $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin\varphi$, $h_\varphi = r$ *y vectores unitarios:*

$$\hat{r} = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi), \quad \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad \hat{\varphi} = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi).$$

Proposición 1 (Gradiente en Coordenadas Ortogonales)**.** *Si* $\overrightarrow{r}(u,v,w)$ *es un sistema de coordenadas ortogonal y* f *es un campo escalar de clase* C^1*, el gradiente de* f *tiene la forma:*

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

Proposición 2 (Divergencia y Rotor en Coordenadas Ortogonales)**.** *Si* $\overrightarrow{r}(u,v,w)$ *es un sistema de coordenadas ortogonal y* $\overrightarrow{F} = F_u\,\hat{u} + F_v\,\hat{v} + F_w\,\hat{w}$ *es un campo vectorial de clase* C^1*, la divergencia y el rotor de* $\overrightarrow{F}$ *tienen la forma:*

$$div\overrightarrow{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right]$$

$$rot\overrightarrow{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$