MA2002-3 Calculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Carlos Conca
Auxiliares: Fabián Ceballos, Cristóbal Godoy

Auxiliar 1: Operadores diferenciales y Curvas

Pregunta 1. ***[Identidades vectoriales]***
Sea $\overrightarrow{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *campo vectorial y* $f,g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *campos escalares, suficientemente diferenciables. Demuestre las siguientes identidades:*

a) $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

b) $\nabla\cdot(f\overrightarrow{F})=f\nabla\cdot\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F}\cdot\nabla f$

c) ***[Propuesto]*** $\nabla\times(f\overrightarrow{F})=f\nabla\times\overrightarrow{F}+\nabla f\times\overrightarrow{F}$

d) $\nabla\times(\nabla f)=0$

e) ***[Propuesto]*** $\nabla\cdot(\nabla\times\overrightarrow{F})=0$

f) ***[Propuesto]*** $\nabla^2(fg)=g\nabla^2 f+2\,\nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g$
Donde $\nabla^2(f)=\nabla\cdot(\nabla f)$ *(spoiler se llama laplaciano)*

Pregunta 2. ***[A calcular derivadas!]***
Calcule la divergencia y rotor del campo vectorial $\overrightarrow{v}$ *que se define como:*

$$\overrightarrow{v}=(e^x sen(y),e^x cos(y),z)$$

Pregunta 3. ***[Cómo calcular un potencial]***
Se dice que un campo vectorial $\overrightarrow{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *es* ***conservativo*** *si existe un campo escalar* $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *tal que* $\overrightarrow{F}=\nabla f$ *en* Ω*. Ahora considere el campo vectorial* $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *dado por:*

$$\overrightarrow{F}(x,y)=\left(cos(x)+log(y),\frac{x}{y}+e^y\right)$$

pruebe que es conservativo y calcule su potencial.

Pregunta 4. ***[Parametrizando curvas]***
Encuentre una parametrizacion para las siguientes curvas:

a) La parábola dada por $y=x^2$*, con* $x\in[0,a]$*,* $a>0$ *descrita en sentido antihorario.*

b) El segmento que une los puntos (α,β,γ) *y* (a,b,c)*.*

c) Una elipse centrada en el origen con semiejes a *y* b *en el plano* $z=2$

d) ***[Propuesto]*** *El triángulo cuyos vértices son* $(0,0),(0,1)$ *y* $(3,3)$*.* ***[Hint****: definala por partes]*

Pregunta 5. ***[Soy veloz]***
Considere un auto rojo de carreras que se prepara para ganar la Copa Pistón, para esto recorre una pista parametrizada de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{r}(t)=(t^2cos(t),t^2sen(t),\frac{t^3}{\sqrt{3}})$$

a) Determine la velocidad y rapidez del auto. Además, calcule el vector tangente asociado a la curva.

b) ¿A qué distancia del plano OXY *se encuentra el auto cuando se ha desplazado* $d=\frac{14}{3}$ *en su camino?*

Definición 1 (Campos)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto no vacío, se definen:*

- *Campo Escalar: A las funciones a valores reales sobre Ω, ie, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*
- *Campo Vectorial: A las funciones sobre Ω a valores en $\mathbb{R}^3$, ie, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$.*

Notación 1. *Se utiliza la notación:*

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Definición 2 (Gradiente)**.** *Sea f un campo escalar de clase C^1. Se define el gradiente de f como:*

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Definición 3 (Divergencia)**.** *Sea $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\,\hat{\imath} + F_2\,\hat{\jmath} + F_3\,\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1. Se define el operador divergencia de $\overrightarrow{F}$ como:*

$$div\,\overrightarrow{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}.$$

Definición 4 (Rotor)**.** *Sea $\overrightarrow{F} = F_1\,\hat{\imath} + F_2\,\hat{\jmath} + F_3\,\hat{k}$ un campo vectorial de clase C^1, se define el operador rotor de $\overrightarrow{F}$ como:*

$$rot\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Una forma más concisa de escribir el rotor de un campo $\overrightarrow{F}$ es como sigue:

$$rot\,\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Definición 5 (Curva)**.** *Un conjunto Γ se llama curva si existe $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ llamada parametrización de la curva, se tiene que $\Gamma = \overrightarrow{r}([a,b])$, esta además puede ser:*

- *Suave: $\overrightarrow{r} \in \mathcal{C}^1$*
- *Regular: $||\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t)|| > 0$*
- *Simple: $\overrightarrow{r}$ es inyectiva.*
- *Cerrada: $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$*

Definición 6 (Longitud de curva)**.** *Se define la longitud de una curva $\overrightarrow{r}$ en funcion del tiempo como:*

$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\overrightarrow{r}(\tau)}{d\tau}||d\tau$$

Definición 7. *Para una curva regular y simple Γ, de parametrizacion $\overrightarrow{r}(t)$ se definen su velocidad $\overrightarrow{v}(t)$, rapidez $v(t)$, vector tangente $\overrightarrow{T}$ y vector normal $\overrightarrow{N}$, como sigue:*

a) $\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$

b) $v(t) = ||\overrightarrow{v}||$

c) $\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{v}}{v}$

d) $\overrightarrow{N}(t) = \frac{\frac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt}}{||\frac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt}||}$