Departamento de Ingeniería Matemática.
MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Jaime Ortega
Auxiliares: Antonia Valenzuela y Ricardo Salas

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 12+1: Fórmula de Cauchy y Teorema de los Residuos

27 de noviembre de 2023

P1. [Fórmula de Cauchy a lo matón]

a) Determine el valor de la integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}dz$$

b) Usando fracciones parciales, calcule

$$\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$$

c) Considere γ la circunferencia centrada en 0 y de radio 1. Calcule

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2+4z+1}dz,$$

d) Utilice las fórmulas de Cauchy para calcular

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{e^2-5z^2+2z+1}{(z-3)(z-1)^2}dz$$

P2. [Propuesto] Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=e^{-z^2}$ y $b>0$. Pruebe que:

(I) $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ (II) $\int_0^\infty e^{-y^2}\sin(2by)dy = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}dy$

Hint: Estudie e^{-z^2} en un contorno rectangular adecuado.

P3. [Polos pa los lolos] Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por

$$f(z)=\frac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\sin(\pi z))^4}$$

Encuentre y clasifique todas las singularidades de $f(z)$, distinguiendo si se trata de singularidades evitables o polos, e indicando el orden cuando corresponde.

P4. [Residuos] Calcule

$$\oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$$

donde la curva se recorre en sentido antihorario.

Resumen

- **[Fórmula de Cauchy]**: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$
- **[Fórmula de Cauchy para derivadas]**: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p,r)$ se cumple que, si su derivada n-ésima derivada existe:
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$
notar que para $n = 0$ se retoma el caso anterior.
- **[Corolario]:** Sea una f una función continua en una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y holomorfa en Ω salvo una cantidad finita de puntos, entonces f es holomorfa en Ω y más aún, es clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω.
- **[Singularidades]**: Se dice que un punto $p \in \mathbb{C}$ es:
  - **Singularidad de f** si f no es holomorfa en p y en todo entorno de p existen puntos donde la función es holomorfa.
  - **Singularidad aislada de f** si f no es holomorfa en p y $\exists R > 0$ tal que $f \in H(D(p,R) \setminus \{p\})$.
  - **Singularidad evitable** si es singularidad aislada y $\lim_{z \to p} f(z)$ existe.
- **[Polos]**: Diremos que z_0 es polo de orden $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ de f si:
  - z_0 es singularidad
  - $m \geq 1$ es e menor tal que:
  $$L_m(p) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = l \neq 0$$
  Si $m = 1$ entonces se llama polo simple.
- **[Residuo]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $p \in \Omega$ un punto y supongamos que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si p es polo de f de orden m, definimos el *residuo* de f en p por:
$$Res(f,p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} f(w) dw$$
Además, se cumple que:
$$Res(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} ((z - p)^m f(z))$$
- **[Función meromorfa]**: f se dice *meromorfa* en un abierto Ω si existe $P \subseteq \Omega$ finito o numerable tal que:
  - $f \in H(\Omega \setminus P)$.
  - f tiene un polo en cada punto de P.
  - P no posee puntos de acumulación
- **[Teorema de los Residuos]**: Sea f una función meromorfa en un abierto Ω, y sea P el conjunto de sus polos. Sea Γ el camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y más aun:
$$\oint_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$
- **[Regla de L'Hopital]**: Sean $f, g \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $n \geq 1$ tales que $g(p) = \ldots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p)$. Entonces:
$$\lim_{z \to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } \exists k \in \{0, \ldots, n-1\}, f^{(k)}(p) \neq 0 \\ \dfrac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \text{si } \forall k \in \{0, \ldots, n-1\}, f^{(k)}(p) = 0 \end{cases}$$