Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Semestre Otoño
MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

EXAMEN (PAUTA)

(Duración: 3h)

P1. (6.0 puntos)

Las series de Fourier son utilizadas en el estudio del diagnóstico de enfermedades del corazón. Por ejemplo, si una función periódica $f(x)$ modela las pulsaciones del corazón, se puede decidir el estado de salud de un paciente y determinar si está enfermo cuando

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{12} \left(a_k^2 + b_k^2\right) > 13,$$

donde b_0, b_k y a_k son los coficientes de Fourier para una función periódica de periodo $2L$ con $-L \leq x \leq L$.
Suponga que el electrocardiograma de un paciente está dado por la función $f(x) = 1 - x$, con $-1 \leq x \leq 1$, periódica de periodo $2L = 2$. La idea es determinar si el paciciente está o no enfermo. Para esto, siga los siguientes paso:

a) (2.0 puntos) Pruebe la desigualdad de Bessel, la cual establece que

$$\frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx.$$

Indicación: Muestre que

$$\int_{-L}^{L} a_0 S_N(x) dx = a_0 \int_{-L}^{L} f(x) dx,$$
$$\int_{-L}^{L} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) S_N(x) dx = L a_k^2 = a_k \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$
$$\int_{-L}^{L} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) S_N(x) dx = L b_k^2 = \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Luego, desarrolle la expresión $0 \leq \int_{-L}^{L} |f(x) - S_N(x)|^2 dx$ **donde** S_N **es suma parcial de la serie de Fourier de la función seccionalmente continua** f**.**

Solución: Sea $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$ la $N-$ésima suma parcial de la serie de Fourier de f. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} a_0 S_N(x)dx &= La_0^2 + \sum_{k=1}^{N} a_k a_0 \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx + a_0 b_k \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\
&= La_0^2 + \sum_{k=1}^{N} a_k a_0 \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} \\
&= La_0^2.
\end{aligned}$$

0.3 pt.

Así se obtiene también

$$\int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} S_N(x)dx = \frac{La_0^2}{2}$$

Análogamente, para $k \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) S_N(x)dx =& a_k \sum_{j=1}^{N} a_j \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
&+ a_k \sum_{j=1}^{N} b_j \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
=& a_k^2 \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\
=& La_k^2.
\end{aligned}$$

0.3 pt.

Por último

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) S_N(x)dx =& b_k \sum_{j=1}^{N} a_j \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
&+ b_k \sum_{j=1}^{N} b_j \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \\
=& b_k^2 \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \\
=& Lb_k^2.
\end{aligned}$$

0.3 pt.

De esta forma, según los calculos anteriores obtenemos

$$\int_{-L}^{L} f(x) S_N(x)dx = \frac{La_0^2}{2} + L\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2\right)$$

0.3 pt.

y

$$\int_{-L}^{L} S_N^2 dx = \frac{La_0^2}{2} + L\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2\right).$$

0.3 pt.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{-L}^{L} |f(x) - S_N(x)|^2 dx &= \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 - 2\int_{-L}^{L} f(x) S_N(x)dx + \int_{-L}^{L} S_N^2(x)dx \\
&= \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 - \frac{La_0^2}{2} - L\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2\right).
\end{aligned}$$

0.3 pt.

En conclusión,

$$\frac{a_0^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2, \quad \text{0.2 pt.}$$

para todo $N \geq 1$. El resultado se sigue considerando $N \longrightarrow \infty$.

b) **(2.0 puntos)** Calcule los coeficientes b_0, b_k y a_k para la función f del electrocardiograma del paciente.

Solución: Para a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x)dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} \right) \\ &= 2. \end{aligned} \quad \text{0.4 pt.}$$

Para a_k, con $k \geq 1$, debemos calcular

$$a_k := \int_{-1}^{1} (1-x)\cos(k\pi x)dx.$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} - x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad \text{0.8 pt.}$$

Se pueden reducir las cuentas anteriores usando algunos resultados sobre intergración de funciones pares e impares sobre intervalos simétricos.

Por último, para b_k debemos calcular

$$b_k = \int_{-1}^{1} (1-x)\sin(k\pi x)dx.$$

Nuevamente, integrando por partes se sigue que

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} + \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{2(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned} \quad \text{0.8 pt.}$$

c) **(2.0 puntos)** Concluya, según el criterio establecido, si el paciente está enfermo o no. **Indicación: Use los ítems anteriores.**

Solución: **Forma 1 (Con la parte a):** Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)^2dx\\ &= \int_{-1}^{1}1-2x+x^2dx\\ &= x-x^2+\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$ 0.5 pt.

Así, usando la desigualdad de Bessel y los calculos anteiriores obtenemos

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{12}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{8}{3}.$$ 1.0 pt.

Por lo tanto, según el criterio establecido el paciente no está enfermo. 0.5 pt.

Forma 2 (Con la parte b):

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{12}(a_k^2+b_k^2)=2+\sum_{k=1}^{12}\frac{4}{k^2\pi^2}\leq 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}=2+\frac{2}{3}\leq 13.$$ 1.5 pt.

Por lo tanto, según el criterio establecido el paciente no está enfermo. 0.5 pt.

P2 **(6.0 puntos)** Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\quad x>0,t>0. \tag{$\star$}$$

Supongamos que la varilla también satisface la condición de borde en el origen dada por $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=0$ para $t>0$, y que inicialmente se cumple $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$ y $u(0,x)=\frac{1}{1+x^2}$ para $x>0$.

a) **(2.0 puntos)** Considere $v(t,\cdot)$ como la extensión par de $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface la ecuación $(\star)$ para $x\in\mathbb{R}$ y $t>0$.

Solución: Consideremos la extensión par de $u(t,\cdot)$, denotada por $v(t,\cdot)$, definida de la siguiente manera:

$$v(t,x)=\begin{cases}u(t,x), & \text{para } x\geq 0,\\ u(t,-x), & \text{para } x\leq 0.\end{cases}$$

Es importante destacar que v resulta ser continua si y solo si u es continua. Además, v es derivable en 0 si y solo si u es derivable en 0 (utilizando la definición de derivada con límite lateral). 0.6 pt.

Por otro lado, se cumple que $v=u$ para todo $t>0$ y para todo $x\in\mathbb{R}_0^+$. Por lo tanto, si u satisface la ecuación $(\star)$ para todo $t>0$ y para todo $x\in\mathbb{R}_0^+$, entonces obviamente v también satisface la ecuación $(\star)$ para todo $t>0$ y para todo $x\in\mathbb{R}_0^+$. 0.6 pt.

Además, considerando que $v(t,x) = u(t,-x)$ para todo $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}_0^-$, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_t &= u_t, \\ v_{tt} &= u_{tt}, \\ v_x &= -u_x, \\ v_{xx} &= u_{xx}, \\ v_{xxx} &= -u_{xxx}, \\ v_{xxxx} &= u_{xxxx}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}_0^-$. Por lo tanto, se concluye que v satisface la ecuación $(\star)$ para todo $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}_0^-$. 0.6 pt.

En consecuencia, se puede afirmar que v verifica la ecuación $(\star)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$. 0.2 pt.

b) **(2.0 puntos)** Deduzca que la transformada de Fourier de $v(t,\cdot)$ es

$$\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t).$$

Ayuda: Utiliza el hecho que la transformada de Fourier de $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

Solución: Para deducir la transformada de Fourier de $v(t,\cdot)$, denotada como $\hat{v}(t,s)$, podemos utilizar el hecho de que la transformada de Fourier de $\frac{1}{1+x^2}$ es $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + \alpha^2 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right) = 0. \quad \text{0.3 pt.}$$

Usando las propiedades de la transformada de Fourier, tenemos:

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2}(t,s) + \alpha^2 s^4 \hat{v}(t,s) = 0. \quad \text{0.3 pt.}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea cuya solución general es de la forma:

$$\hat{v}(t,s) = A(s)\cos(as^2 t) + B(s)\sin(as^2 t), \quad \text{0.3 pt.}$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son funciones que dependen de s y deben determinarse a partir de las condiciones iniciales.

Dado que $\hat{v}(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$, podemos escribir:

$$\hat{v}(0,s) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}. \quad \text{0.3 pt.}$$

Sustituyendo esto en la solución general, tenemos:

$$\hat{v}(0,s) = A(s)\cos(0) + B(s)\sin(0) = A(s).$$

Por lo tanto, $A(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$. 0.3 pt.
Por otro lado como $\hat{v}_t(0,s) = 0$, se tiene que

$$\hat{v}_t(0,s) = B(s)as^2 = 0 \Rightarrow B(s) = 0$$ 0.3 pt.

Finalmente, la transformada de Fourier de $v(t,\cdot)$ es:

$$\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t).$$ 0.2 pt.

c) **(2.0 puntos)** Concluya que la solución u puede escribirse en forma integral como sigue:

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds.$$

Solución: Si resolvemos la ecuación para v y encontramos una solución par, como las soluciones de esta ecuación son continuas se tiene $\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0$, para $t > 0$ y en consecuencia restringiendo v a $[0,\infty)$ obtenemos la solución del problema original. 0.5 pt.
Notemos que si una función $f(s)$ es par, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(f(s)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(s) e^{isx} ds + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(-s) e^{isx} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(s) e^{isx} ds + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^0 f(u) e^{-iux} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(s) \left(\frac{e^{isx} + e^{-isx}}{2} \right) ds \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(s) \cos(sx) ds
\end{aligned}$$ 0.5 pt.

Aplicando a $\hat{v}(t,x)$ (que es par) llegamos a

$$v(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(as^2 t) \cos(sx) ds.$$ 0.5 pt.

Si consideramos la extensión par $v(t,x)$ de la función $u(t,x)$, como se mencionó anteriormente, podemos concluir que la solución $u(t,x)$ del problema original se puede expresar en términos de $v(t,x)$ de la siguiente manera:

$$u(t,x) = v(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(as^2 t) \cos(sx)\, ds.$$ 0.5 pt.