# Pauta guia C1

**P1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule, donde existan, las derivadas parciales de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

(b) Verifique si $f$ es diverenciable en $\mathbb{R}^2$ .

(c) Concluya si f es de clase $C^1$ en $\mathbb{R}^2$.

a. para $(x,y) \neq (0,0)$ se pueden calcular directamente

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\text{in}(x^2+y^2) + \frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\,\text{in}(x^2+y^2) + \frac{2y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

Como en $(x,y) = (0,0)$ hay una discontinuidad

↳ Tenemos que calcular por dejinicion

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \operatorname{in}(t^2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} t \operatorname{in}(t^2)$$

$$= \lim_{t \to 0} 2t \operatorname{in}(t)$$

Tomando $x = 1/t \rightarrow t = 1/x$

$$= \lim_{t \to \infty} -2 \cdot \frac{1}{X} \operatorname{in}(X)$$

es de la forma

$$= \lim_{t \to \infty} -2 \frac{1}{X} \operatorname{in}(X) = \frac{\infty}{\infty}$$

L'Hoppital

$$M(X) = -2\operatorname{in}(X) \rightarrow M'(X) = \frac{-2}{X}$$

$$g(X) = X \rightarrow g'(X) = 1$$

Remplazando

$$= \lim_{t \to \infty} -\frac{2}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Analogamente se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

b. para ello, estudiaremos la continuidad de las derivadas parciales:

→ para $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene directamente la continuidad por algebra y composicion de funciones continuas.

↓

Solo es necesario estudiar la continuidad en el origen!

↳ lo haremos por medio de los limites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Para ello, notamos las sig desigualdades

1. $\left|\frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x|$

2. $\left|\frac{2y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq 2|y|$

3. $|x|\,|\ln(x^2+y^2)| \leq \sqrt{x^2+y^2}\,|\ln(x^2+y^2)|$

haciendo : $x = r\cos\theta$
$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

$|x|\,|\ln(x^2+y^2)| \leq r\,|\ln(r^2)|$

$|x|\,|\ln(x^2+y^2)| \leq 2r\,|\ln(r)|$

4. Analogo a 3.

$|y|\,|\ln(x^2+y^2)| \leq 2r\,|\ln(r)|$

donde

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Analizando los limites por sandwich por lo tanto:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| 2x\,\text{in}\,(x^2+y^2) + \frac{2x\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| 2x\,\text{in}(x^2+y^2) \right| + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{2x\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right|$$

↳ Aqui usamos lo obtenido anteriormente

$$\leq \lim_{r\to 0} 2r\,|\text{in}(r)| + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x|$$

$$= 0$$

Se concluye que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$!

$\longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en todo su dominio!

Analogamente!

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$!

$\longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en todo su dominio!

$\therefore$ las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.

C. Si, ya que las derivadas parciales Son continuas en todo Su dominio

(Jaja, Saludos)

**P2.** Demuestre si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados o ninguno.

(a) $A = \left\{ (\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \wedge 1 < x^2 + y^2 < 4 \right\}$

a. $A = \{ (\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N} \}$

↳ con un poco de imaginacion notamos que el conjunto corresponde a puntos aislados

↳ "Sospechamos" que es cerrado.

notamos que $(1,0) \in A^c$, sea $r > 0$

por prop arquimediana (es de diferencial)

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tq $\quad r \cdot \bar{n} > 1 \longrightarrow r > 1/\bar{n}$

Tenemos entonces que:

$$(1, 1/\bar{n}) \in B((1,0), r)$$

$\therefore \forall r > 0 \quad , \quad B((1,0), r) \subseteq C^c$

$C^c$ no es abierto $\longleftrightarrow$ $C$ no es cerrado

$\therefore \quad C$ no es ni abierto ni cerrado

b. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0 \wedge 1 < x^2+y^2 < 4\}$

↳ Por la desigualdad, suponemos que el conjunto es abierto

Utilizaremos la propiedad que dice:

Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ abiertos finitos

$$\bigcup_{i\in A} A_i \text{ es abierto.}$$

luego, notamos que

$$B = B_1 \cap B_2 \cap B_3$$

con:

$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$

$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2 > 1\} = (\bar{B}(0,1))^c$

$B_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\} = B(0,2)$

es directo que $B_2$ y $B_3$ son abiertos ya que se definen como bolas abiertas y complementos de bolas cerrada

$\rightarrow$ Solo falta estudiar $B_1$.

Sea $(x,y) \in D_1 \rightarrow y > 0$

Tomando $r = y/2$

pdq: $B((x,y),r) \subseteq B_1$

Sea $(x',y') \in B((x,y),r)$

$$|y-y'| \leq \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} < y/2$$

$\longrightarrow y - y' < y/2$

y como $(x',y') \in B((x,y),r)$

$y/2 < y'$

por lo que:

$0 < y'$

$\longrightarrow (x',y') \in D_1$

$\therefore D_1$ es abierto

$\therefore D$ es abierto al ser intersección finita de abiertos.

**P3.** Demuestre que:

$$B(x_0, r) = rB(0,1) + \{x_0\}.$$

Donde: $C + B = \left\{c + b \in \mathbb{R}^d : c \ni C, b \in B\right\}$

pdq: $B(x_0, r) = r \cdot B(0,1) + \{x_0\}$

dado $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d : a \in A, b \in B\}$

↪ Veamos por doble inclusion

$\subseteq$] Sea $y \in B(x_0, r)$, notamos que:

$$y = x_0 + r\left(\frac{y - x_0}{r}\right)$$

$$\|y - x_0\| < r \longrightarrow \left\|\frac{y - x_0}{r}\right\| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{y - x_0}{r} \in B(0,1)$$

$$\therefore y \in \{x_0\} + r\,B(0,1)$$

$$\longrightarrow B(x_0, r) \subseteq \{x_0\} + r\,B(0,1)$$

$\supseteq$] Sea $x_0 + rz$, con $z \in B(0,1)$

$$\|x_0 - (x_0 + rz)\| = \|rz\| = r \cdot \|z\| < r$$

$\longrightarrow \{X_0\} + r\,B(0,1) \subseteq B(X_0 + r)$

$\therefore\ B(X_0, r) = r\,B(0,1) + \{X_0\}$

**P4.** Sea $\alpha > 0$ un parametro real.Se define la funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2\alpha}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine los valores de $\alpha$ para los cuales las derivadas parciales de $f$ existen en $(0,0)$, en tal caso, calculelas.

(b) Determine los valores de $\alpha$ para los cuales $f$ es diferenciable en $(0,0)$.

a. notamos que para $(x,y) \neq (0,0)$ no hay problema

→ Veremos por def las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|t|^{2\alpha}}{t^3}$$

↳ notamos que la existencia de este límite depende del valor de $\alpha$.

↓

nos dividiremos en 3 casos!

**1)** $2\alpha - 3 > 0 \longrightarrow \alpha > \frac{3}{2}$

para este caso, dada una sucesion $(t_n)_n \subseteq \mathbb{R}/\{0\}$

Tq $t_n \to 0$, Se tiene que:

$$f(t_n, 0) = \frac{|t_n|^{2\alpha}}{|t_n|^3} = |t_n|^{2\alpha-3}$$

Como $t_n \to 0$, entonces $|t_n| \to 0$
y como $2\alpha - 3 > 0$, se tiene que

$$|t_n|^{2\alpha-3} \longrightarrow 0$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} \frac{|t_n|^{2\alpha}}{t_n^3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

**2)** Caso $2\alpha - 3 = 0 \longrightarrow \alpha = 3/2$

Considerando la sucesion $t_n = 1/n$

notamos que $t_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

entonces

$$\frac{|t_n|^{2\alpha}}{t_n^{3}} = \frac{|1/n|^{2\alpha}}{(1/n)^3}$$

$$= \frac{(1/n)^3}{(1/n)^3} = 1$$

$$\longrightarrow \lim_{t_n\to 0} \frac{|t_n|^{2\alpha}}{t_n^{3}} = 1$$

por otro lado, si tomamos la sucesion

$$X_n = -1/n$$

la cual satisface

$$X_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

notamos que:

$$\frac{|X_n|^{2\alpha}}{X_n^{3}} = \frac{|-1/n|^{2\alpha}}{(-1/n)^3} = \frac{|-1/n|^3}{(-1/n)^3} = -1$$

$$\longrightarrow \lim_{x_n \to 0} \frac{|x_n|^{2\alpha}}{x_n^3} = -1$$

notamos que los limites no coinciden

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe!

$\boxed{3}$ $2\alpha - 3 < 0$ $(\alpha < 3/2)$

Consideremos la sucesion:

$$t_n = 1/n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

luego:

$$\frac{|t_n|^{2\alpha}}{t_n^3} = \frac{|1/n|^{2\alpha}}{(1/n)^3}$$

$$= \frac{(1/n)^{2\alpha}}{(1/n)^3}$$

$$= (1/n)^{2\alpha - 3}$$

$$= n^{3-2\alpha} \longrightarrow \infty$$

luego, el límite no existe ya que diverge

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si y solo si $\alpha > 3/2$ y vale 0.

Veamos ahora a $\partial f / \partial y \, (0,0)$

↳ estudiamos por definición!

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{|0|^{2\alpha}}{t^3} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe $\forall \alpha > 0$ y su valor es 0.

b. Vamos a resolver por definicion:

Si $f$ fuera diferenciable en $(0,0)$ entonces se tendria que:

$$\exists\, Df(0,0) \text{ tq } \forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - Df(0,0)(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

Sabemos que, en caso de existir $Df$, este corresponde al Jacobiano y ademas

$$Df(0,0)(h_1,h_2) = \langle Jf(0,0), (h_1,h_2) \rangle$$

↳ producto punto

→ notamos que si $\alpha \leq 3/2$, $\partial f/\partial x(0,0)$ no existe, por lo tanto, el Jacobiano no existe y $f$ no es diferenciable!

→ Veamos el caso $\alpha > 3/2$:

Para este caso, las derivadas parciales existen y valen 0, por lo que:

$$Jf(0,0) = (0,0)$$

↳ con esto, debemos verificar el limite anteriormente planteado.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - \langle Jf(0,0),(h_1,h_2)\rangle|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - \langle (0,0),(h_1,h_2)\rangle|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1|^{2\alpha}}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

notamos que, dada una sucesion $(x_n,y_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Tq: $(x_n,y_n) \longrightarrow (0,0)$

Se tiene que:

$$0 \leq \left| \frac{|x_n|^{2\alpha}}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{|x_n|^{2\alpha}}{|(x_n^2)|^{3/2}}$$

$$= \frac{|x_n|^{2\alpha}}{|x_n|^3} = |x_n|^{2\alpha - 3}$$

Como $x_n \to 0$ y $2\alpha - 3 > 0$, se tiene:

$$|x_n|^{2\alpha-3} \longrightarrow 0$$

luego $\dfrac{|x_n|^{2\alpha}}{(x_n^2+y_n^2)^{3/2}} \longrightarrow 0$

Por sandwich

$\therefore$ el limite es 0 y f es dif en $(0,0)$

$\therefore$ f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si $\alpha > 3/2$

**P5.** Considere la funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ \sqrt{x+y}+xy & \text{si } x+y > 0 \end{cases}$$

Determine los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde $f$ es continua.

por algebra y composicion de funciones continuas, $f$ es continua cuando $x+y<0$ y $x+y>0$

↳ el unico punto "conflictivo" es $x+y=0$.

debemos ver si se cumple para cualquier $(x_0, y_0)$ arbitrario tal que $x_0+y_0=0$ que:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x+y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x+y<0}} f(x,y)$$

lo que es equivalente a:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x+y>0}} \sqrt{x+y}+xy = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ x+y<0}} x+y$$

Como estas funciones son continuas dentro de la region donde se evaluan:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x+y>0}} \sqrt{x+y}+xy = \sqrt{x_0+y_0}+x_0y_0$$

pero como $x_0+y_0=0 \Rightarrow x_0=-y_0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x+y>0}} \sqrt{x+y}+xy = -x_0^2$$

de la misma forma, se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x+y<0}} x+y = x_0+y_0=0$$

luego, la igualdad necesaria para tener continuidad es:

$$-x_0^2 = 0$$

lo cual se tiene solo para

$$(x_0,y_0) = (0,0)$$

por lo tanto, $f$ es continua en el conjunto:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>0 \vee x+y<0\} \cup \{(0,0)\}$

↳ en cualquier otro punto, $f$ no es continua !

Animo y Suerte en 

el control