MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 12: Matrices definidas positivas y formas cuadráticas.

4 de diciembre de 2023

P1. Que es esto ayuda Escriba en forma x^tAx las siguientes formas cuadráticas:

a) $q(x) = -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + 5x_2^2$
b) $q(x) = x_1(2x_1 - x_2) + x_2(3x_1 + x_2)$
c) $q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3$
d) $q(x) = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2$

P2. Actitud positiva. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, y sea $v \in \mathbb{R}^n$.

a) Muestre qure v es vector de A si y solo si es vector propio de $I - A$, y calcule su valor propio asociado para $I - A$ en función de λ, su valor propio para A.
b) Muestre que $I - A$ es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A son menores estrictos que 1.

P3. Optimizamos matrices Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^tAx - b^tx + c$ Se quiere minimizar f.

a) Sea $x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}b$. Pruebe que $f(x) = (x - x_0)^tA(x - x_0) - x_0^tAx_0 + c$
b) Concluya que el único mínimo de f se alcanza en x_0, i.e., que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ y que la igualdad se alcanza solamente cuando $x = x_0$

P4. ¿Y este quién es? Considere la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6i & 0 \\ -6i & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 52 \end{pmatrix}$$

Calcule su descomposición de Cholesky.